Riešenie 1. úlohy:

V prvom rade si treba uvedomiť, že dvojciferných čísel je 90 (10-99). Potom pri skúmaní deliteľov prirodzeného čísla prídeme na to, že pokiaľ má mať nepárny počet deliteľov, musí nám po vydelení pôvodného čísla týmto deliteľom vyjsť výsledok rovný tomuto deliteľovi. Túto vlastnosť majú iba čísla, ktoré sú druhými mocninami prirodzených čísel. V intervale <10;99> existujú len tieto: 16,25,36,49,64,81. Je ich 6. Potom stačilo odpočítať 90-6 = 84.

84 dvojciferných čísel má párny počet deliteľov.

Riešenie 2. úlohy:

Na začiatku si vypočítame objem bazéna. Vypočítame ho ako: ((4+1,5).50/2).25 = 3437,5m^3. To sa rovná 3437500 litrov. Teda 4,5 milióna litrov vody sa doň nezmestí a z bazéna vytečie 4 500 000 – 3 437 500 = 1 062 500 litrov vody.

Z bazéna vytečie 1 062 500 litrov vody.

Riešenie 3.úlohy:

Túto úlohu bolo možné riešiť viacerými spôsobmi. Nazvime si štvorec štandardne ABCD. Umiestnime si do štvorca ešte trojuholník ABY tak, aby bod Y predstavoval priesečník štvrťkružníc. Úsečka AY zviera s úsečkou AB uhol 60° - čo sa dá zdôvodniť viacerými spôsobmi, napríklad si stačí uvedomiť, že vzdialenosť AY sa rovná vzdialenosti AB (polomer kružnice) a tiež vieme, že │AY│ sa rovná vzdialenosti │BY│ (opäť polomer kružnice). Čiže aj │AY│sa musí rovnať│BY│. Trojuholník ABY je rovnostranný. Potom je veľkosť uhla │DAY │= │CBY│ = 90°- 60° =30°. V štvorci sú dva rovnocenné kruhové výseky, ktorým prislúchajú uhly DAY a CBY. Obsahy týchto výsekov môžeme sčítať a nahradiť ich dvojnásobkom jedného. Obsah časti s označením X už vypočítame veľmi jednoducho:
X = obsah štvorca ABCD – obsah trojuholníka ABY – 2.obsah kruhového výseku DAY
$X = a^2 – (a*\sqrt{3}*a/2)/2 – (2* a^2*\pi*30°)/360°$
$X = 100\ cm^2 – 25*\sqrt{3}\ cm^2 – 100*\pi/6\ cm^2$
X = (zaokrúhlene)4,34 cm^2
<u>Poznámka:</u> Viacerí z Vás sa rozhodli zaokrúhľovať pri medzivýpočtoch. Nie je to správne, pretože zaokrúhľovaním sa už nikdy nedopracujete k presnému výsledku. Zlomky nechávajte zlomkami, odmocniny odmocninami, ak je to potrebné, zaokrúhľujte len vo výsledku(aby ste si vedeli lepšie predstaviť, aké približné číslo Vám vyšlo).

Obsah časti s označením X je približne 4,34 cm^2.

Riešenie 4. úlohy:

Milan korčuľoval 2,5 hodiny = 150 minút. Ak strávil na korčuliach 4-krát viac času jako padaním, vstávaním a oddychovaním, tak rovnicou $4x + x = 150$ dostaneme $x = 30$ minút, ktoré strávil padaním,oddychovaním a vstávaním. Ak mu ale padanie, oddychovanie a vstávanie trvá rovnako dlho, jednotlivé úseky trvajú 10 minút. Čiže vstával 10 minút dokopy. Ak mu jedno vstávanie trvá 6 sekúnd, tak to znamená, že 600:6=100-krát vstával. Jano mu ale pomohol 10-krát vstať, čiže sám vstával 90-krát a to mu zabralo 90.6=540 sekúnd = 9 minút.

Milan strávil vstávaním 9 minút.

Riešenie 5. úlohy:

Prvú vežu môžeme rozmiestniť 64 spôsobmi. Druhú vežu už toľkými spôsobmi rozmiestniť nemôžeme – dve veže sa nesmú nachádzať v jednom riadku ani v jednom stĺpci. Druhej veži ostáva v každej polohe prvej veže 64-15=49 miest, kam ju môžeme položiť. Všetkých umiestnení je spolu 64*49=3136.

Na šachovnici vieme rozmiestniť dve veže tak, aby sa neohrozovali, 3136 spôsobmi.

Riešenie 6. úlohy:

Najprv si vypočítame priemer gule, pretože je zároveň základňou lichobežníka z prierezu držiaka. $o = \pi.d$ a dosadíme: $9{,}42 = \pi.d$ $d=9{,}42/\pi=3$cm. Potom si vypočítame polovicu prierezu gule: $S/2= \pi.r^2/2$ $S/2= \pi.1{,}5^2/2$ $S/2= 2{,}25\pi/2 = 3{,}5325\text{cm}^2$. Ešte budeme potrebovať polomer podstavy držiaku: $S= \pi.r^2$ $31{,}4= \pi.r^2$ $r^2=10$ $r=\sqrt{10}$. Teraz už len stačí vypočítať výšku držiaka(lichobežníka) tvoreného priemerom gule a prierezom držiaka dokopy. Obsah lichobežníka je $3{,}5325 + 12{,}4675 = 16\text{cm}^2$. $S=(a+c).v/2$ $16=9{,}32.v/2$ $v=3{,}43$cm.

Držiak sa zmestí do poličky vysokej aspoň 3,44 centimetra.

Riešenie 7. úlohy:

Z Pytagorovej vety dostaneme $a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 4r^2 – 3r^2 \Rightarrow a^2 = r^2 \Rightarrow a = r$. Označme stred strany AB bod S. Vidíme, že dĺžky SB,BC a SC sú dlhé r a preto ide o rovnostranný trojuholník. Ten má vnútorné uhly o veľkosti 60° a teda uhol ACS má veľkosť 30°. Keďže dotyčnica je v danom bode dotyku C kolmá na polomer(SC), zviera úsečka SC a priamka XY uhol 90°. Uhol ACX má potom veľkosť 90-30=60°.

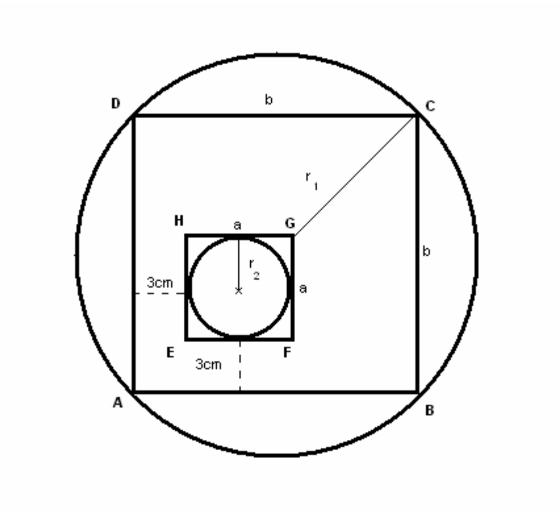
Uhol ACX má veľkosť 60°.

Riešenie 8.úlohy:

Zostavíme si teda sústavu rovníc. $64c = 40 + 5x$ a $20c = 2x – 40$, kde x vyjadruje cenu jedného litra mlieka a c je clo za jeden liter mlieka. Jej vyriešením dostaneme x=120 dukátov a clo zaň 10 c=dukátov.V prípade, že nebudú platiť za mlieko, ktorým platia clo, budú sústavy zostavené takto: $59c = 40 + 5x$ a $18c = 2x – 40$. Dostaneme x=110 dukátov a c=10 dukátov.

a) Cena jedného litra mlieka je 120 dukátov a clo zaň je 10 dukátov.
b) Cena jedného litra mlieka je 110 dukátov a clo zaň je 10 dukátov.

Riešenie 9. úlohy:



Väčšina z Vás, čo počítala tento príklad, ho pochopila tak ako sme chceli, ale našli sa aj takí, ktorí to zobrali všeobecnejšie (čo sme veľmi radi). V tomto vzoráku si ukážeme ten všeobecnejší spôsob riešenia.

$a \in N$
$S_1=\pi.r^2$ $S_2= \pi.r^2$
$S_1/S_2 = 2/25$
$(2r_2)^2 = 2b^2 \Rightarrow (4r_2)^2 = 2b^2 \Rightarrow r_2 = (\sqrt{2}/2).b$
$r_1 = a/2$
$\pi.r_1^2/ \pi.r_2^2 = 2/25 \Rightarrow (a/2)/((\sqrt{2}/2).b)^2 = 2/25$
$2a/4b^2 = 2/25 \Rightarrow a^2/b^2 = 4/25 \Rightarrow a/b = 2/5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5a = 2b$

Ak ste si všimli, vôbec sme nevyužili, že vzdialenosť rovnobežiek AB a EF je rovnaká ako aj EH a AD . Z toho vyplýva, že na nich nezáleží. A preto má tento príklad nekonečne veľa riešení.
Pre tých, ktorý to pochopili tak ako sme chceli si pre overenie stačí správne vyjadriť a, alebo b a prídu k správnemu výsledku : 4 .

Dĺžka strany je 4 centimetre.

Riešenie 10. úlohy:

Hľadané číslo musí byť aspoň trojciferné, kedže z neho škrtáme posledné dve číslice. Zároveň musí začínať číslami 1,4,9,16. Jednoduchšie riešenie bude, ak začneme od konca. Hľadajme najväčšie číslo začínajúce číslom 16 a pokračujúce dvoma číslicami ,a celé dokopy je druhou mocninou prirodzeného čísla. Najväčšie možné je 44, no $44^2 = 1936$; 19 ale nie je druhou mocninou. $43^2 = 1849$; 18 tiež nie je druhá mocnina prirodzeného čísla. $42^2 = 1764$; 17 nevyhovuje. Potom dostaneme číslo $41^2 = 1681$, kde číslo 16 je druhou mocninou. Čiže rybári tam boli štyria. Počet kačiek bol 41 a zároveň dĺžka hrádze nie je deliteľná desiatimi.

Dĺžka hrádze bola 1681 metrov.