

## Vzoráky

Na úvod by som chcel podotknúť zopár maličkostí, ktoré sme si všimli v prvej sérii. V prvom rade by som chcel povedať, že sme strhávali 0,5b za každý odpísaný príklad, ale nabudúce to už bude viac. Je totiž veľmi malá pravdepodobnosť, aby dvaja žiaci z jednej školy mali úplne rovnaké riešenie príkladu. Po druhé by som chcel ešte raz pripomenúť tým žiakom, ktorí písali iba výsledky príkladov alebo písali dva rôzne príklady na jeden list papiera (každý z inej strany), že každý príklad je treba písať na samostatný list papiera. Keďže každý príklad opravuje niekto iný, nemáme si tieto príklady ako rozdeliť na opravovanie. Preto upozorňujem, že tým, ktorí budú písať viac príkladov na jeden papier, ich riešenia NEOPRAVÍME!!! A po tretie: boli by sme celkom radi keby ste pri príkladoch s deliteľnosťou určovali aj kritériá deliteľnosti.

### Príklad 1: (Maťo)

Táto úloha sa dala riešiť rôznymi spôsobmi. Povedzme si aspoň jeden z nich. Označme si stranu štvorca  $a$ . Keďže  $KL$  je priemer vpísanej kružnice, potom  $|KL|=a$ . Z bodu  $M$  si zostrojíme kolmicu na stranu  $KL$ , ktorá je polomerom kruhu, preto má dĺžku  $a/2$ . Vypočítame obsah štvorca a trojuholníka.

$$S_{\text{štvorca}}=a \cdot a=a^2$$

$$S_{\text{trojuholník}}=(a \cdot a/2)/2=a^2/4$$

$$S_1/S_2=(a^2/4)/a^2=1/4=25\%$$

### Príklad 2: (Adrián)

Muž vypije sud OpenColy za 27 dní, teda za jeden deň vypije  $1/27$  sudu. Rovnakým spôsobom zistíme, že žena vypije za jeden deň  $1/54$  sudu. Spolu za jeden deň vypijú  $1/27+1/54=1/18$  sudu. To znamená, že celý sud vypijú za 18 dní.

### Príklad 3: (Adrián)

Objem prvého valca je  $V=\pi \cdot r^2 \cdot v$ . Teda  $10 \text{ l}=\pi \cdot r^2 \cdot v$ . Objem druhého valca je  $V=\pi \cdot (3r)^2 \cdot v/2=\pi \cdot r^2 \cdot v \cdot 9/2$ , kde  $\pi \cdot r^2 \cdot v$  je 10 litrov. A tak môžeme napísať:  $V=10 \cdot 9/2=45 \text{ l}$ . Objem druhého valca je 45 litrov.

### Príklad 4: (Jakub)

Najjednoduchší spôsob riešenia bol písať si údaje do tabuľky:

Týždeň	Suma na zač. týždňa	Nákup ananásov	Predaj ananásov	Cesta	Suma na konci
1	10€	-1€	+5€	-2€	12€2
12€	-3€	+15€	-2€	22€	3 22€
-5€	+25€	-2€	40€	4	40€-7€
+35€	-2€	66€	5	66€	-9€+45€
-2€	100€				
6	100€	-11€	+55€	-2€	142€
....					

Teraz už môžeme vidieť, že pán Adamec bude mať 100€ po piatich týždňoch. Niektorí z vás zabudli odpočítať cestu, alebo nákup ananásov. Vtedy som strhával body, aj keď im napokon vyšiel správny výsledok.

### Príklad 5: (Dávid)

Najprv si musíme predstaviť danú situáciu. Uvažujeme, že Filip aj Roderik stoja presne na tom istom mieste chrbtami k sebe. Obaja prejdú presne 200 krokov po jednej priamke, avšak pôjdu opačným smerom. Dalo by sa povedať, že budú od seba vzdialení 400 krokov, ale to nie je až tak správne, pretože Filipov a Roderikov krok má inú dĺžku. Môžeme povedať len toľko, že sú od seba vzdialení 200 Filipových krokov a 200 Roderikových krokov. Musíme si teda vypočítať, akej vzdialenosti zodpovedá 200 Filipových a 200 Roderikových krokov. Dĺžku jedného Filipovho kroku máme jasnú zo zadania (0,7m). Teda keď Filip prejde jeho 200 krokov, prejde vzdialenosť  $200 \cdot 0,7=140\text{m}$ .

Keďže Roderikov krok je o 15% dlhší ako Filipov krok, jeho dĺžku jednoducho vypočítame trojčlenkou alebo inými spôsobmi, napr.  $1,15 \cdot 0,7=0,805\text{m}$ . Keď už poznáme dĺžku jedného Roderikovho kroku, nie je problém vypočítať vzdialenosť, ktorú prejde, keď urobí 200 krokov. Tak ako pri Filipovi, len s inou dĺžkou jedného kroku;  $200 \cdot 0,805=161\text{m}$ .

Už sme vypočítali jednotlivé vzdialenosti, ktoré naši pištoľníci prejdú. Ako sme už povedali na začiatku, finálna vzdialenosť medzi nimi je súčet vzdialeností ich 200 krokov. Teda Filip a Roderik sú vo finálnej pozícii vzdialení  $140+161=301\text{m}$ .

A až teraz sa dostávame k samotnej otázke, na ktorú treba v tejto úlohe odpovedať. Kto zomrie...?

Keďže vieme, že dostrel ich pištoľ je 300m, ale oni sú od seba vzdialení 301m, pištole na takú

vzdialenosť nedostrelia a tým pádom NIKTO nezomrie.

Skoro úplne všetci ste túto úlohu zvládli vynikajúco, avšak vždy si treba pozorne prečítať zadanie a odpovedať na to, na čo sa pýtame.

### Príklad 6: (Jakub)

(Na základe skutočnej udalosti :D) Išli sme rýchlosťou 25 km/h, čo znamená, že každých 5 km sme prešli za čas  $t=s/v=5/25=1/5\text{h}=12$  minút. U každého spolužiaka sme sa zdržali 30 minút. Jedenástich spolužiakov by sme teda prešli za  $11 \cdot 42=462$  minút. Ibaže sme spomalili, a to po 6 hodinách, teda po 360 minútach.

Za ten čas sme stihli prejsť  $360/42=8,57$  spolužiakov. Teda 8 spolužiakov +  $0,57*42=24$  minút z času deviateho spolužiaka (teda 12 minút cesty a 12 minút u neho). Takže k desiatemu a jedenástemu spolužiakovi sme prešli za čas  $t= s/v = 5/20 = 15$  minút, Teda o 3 minúty neskôr ku každému. Jedenástich spolužiakov sme teda prešli za  $462 + 2*3 = 468$  minút. Plus ešte cesta domov ďalších 15 minút:  $468 + 15= 483$  minút. To je 8 hodín a 3 minúty, čo znamená, že domov sme prišli o 18:03.

#### Príklad 7: (Adrián)

Pytagorovou vetou viem vypočítať  $|CD| = \sqrt{(3^2+4^2)}=5$  cm a  $|CG| = \sqrt{(13^2-5^2)}=12$  cm. Výška rovnoramenného pravouhlého trojuholníka CFE na preponu sa rovná polovicike dĺžky prepony. Jednotlivé obsahy sú:

$$S_{ABCD}=(6+10)*3/2=24 \text{ cm}^2$$

$$S_{CDE}=5*12/2=30 \text{ cm}^2$$

$$S_{CEF}=12*6/2=36 \text{ cm}^2$$

A súčet týchto obsahov je  $36+30+24=90 \text{ cm}^2$ .

#### Príklad 8: (Dávid)

Zadaním úlohy bolo, aby ste číslo 987654321 zmenili na 10-ciferné doplnením 0 tak, aby bolo deliteľné 11. Úplne najprv z všetkého sa dá vylúčiť možnosť, keby sme 0 dosadili úplne na začiatok. Číslo 987654321 by sme predsa nezmenili na 10-ciferné – ale na to každý z vás prišiel. Tak nám zostáva preskúmať zostávajúcich deväť možností. Najjednoduchšie to bolo pre vás asi nahádzať do kalkulačky a iba sledovať výsledok, či vyjde desatinné alebo celé číslo. No to je riešenie, nenamietam. Avšak keby ste nemali k dispozícii kalkulačky, ako by ste túto úlohu riešili?

Delili by ste ručne! To je ono. Ale nie, my vás predsa nechceme zničiť... určite nie takýmto

spôsobom :D Určite viete, že existujú kritériá deliteľnosti pre rôzne čísla. Bez problémov ovládáte kritériá deliteľnosti 2, 3, 5, 6, 9,... ale o kritériách deliteľnosti 11 ste ešte všetci nepočuli (ako som zistil z vašich riešení – naozaj pochvala tým ktorí to už ovládajú). Pre množstvo zložených čísel si viete takéto podmienky vyvodit'. Uvediem príklad: mali by ste určiť kritériá pre deliteľnosť číslom 15.

Každý z vás vie, že číslo 15 je súčin čísel 3 a 5. Teda  $3*5=15$ . Takže kritérium deliteľnosti 15 nie je nič iné ako kritérium deliteľnosti 3 a 5 súčasne. Keďže kritériá deliteľnosti 3 a 5 zvládnete bez problémov, už nie je pre vás problém zistiť, či je nejaké číslo deliteľné 15.

Avšak 11 je prvočíslo a nedá sa už teda rozložiť na žiadny prvočíselný súčin. Preto pre neho existuje špeciálne kritérium deliteľnosti, ktoré môže znieť: číslo je deliteľné 11 práve vtedy, keď rozdiel súčtu cifier na párnych a nepárnych miestach je deliteľný 11. Alebo inak – celé číslo  $ak-1 a_{k-2}...a_3 a_2 a_1 a_0$  je deliteľné jedenástimi, ak výraz  $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-...$  je deliteľný jedenástimi. Nádherný dôkaz sa dozviete možno už o pár mesiacov :-). (Posielam pozdrav do Spišskej Teplice :-))

Stačí teda sčítavať a odčítavať jednotlivé cifry a pritom vôbec nemusíme deliť. V našom prípade bolo treba preskúšať všetkých 9 možných pozícií 0, pretože nebolo zadané že existuje práve jedno riešenie. Pri podobných úlohách môže byť tých riešení kľudne aj viac. Práve za túto časť riešenia ste postrácali mnoho bodov...

Všetkým sa vám však podarilo nájsť 10-ciferné číslo, ktoré vyhovuje podmienkam zo zadania. Je to číslo 9 870 654 321. Niektorí však našli aj ďalšie – 9 876 054 321 – ja som to skúšal prepočítavať aspoň x-krát, no aj tak s nimi nemôžem súhlasiť.

#### Príklad 9: (Maťo)

34563456.....

Najprv si napíšeme kritéria deliteľnosti pre číslo 15.

15 si rozložíme na súčin prvočísel:  $15=5*3$  Teda číslo musí byť deliteľné 3 a zároveň 5.

Deliteľnosť tromi: číslo je deliteľné tromi práve vtedy, keď je jeho ciferný súčet deliteľný tromi.

Deliteľnosť piatimi: číslo je deliteľné piatimi práve vtedy, keď sa končí číslicou 0 alebo 5.

Ak sa číslo skladá iba z cifier 3, 4, 5, 6, potom na konci musí byť 5.

Keďže nie je napísané, že musíme použiť všetky cifry, najmenšie číslo končiace 5 je 345. Overíme, či je deliteľné tromi:  $(3+4+5)=12 \rightarrow 3/12$  (znamená že 12 je deliteľné 3). Teda najmenšie číslo je 345, ktoré má 3 číslice. Aby bola v ďalších číslach na konci 5, k číslu 345 doplníme čísla 6345, pričom  $(6+3+4+5)=18 \rightarrow 3/18$ . Potom naše hľadané čísla budú 345, 3456345, 34563456345, ... Teraz už len spočítame číslice a zistíme, že odpoveď bude: Číslo môže obsahovať 3, 7, 11, 15, 19, ... číslic. Alebo odpoveď môžeme zapísať v tvare vzorca  $3+4*(n-1)$ , kde n je prirodzené číslo.

#### Príklad 10: (Maťo)

Označíme si vek detí v čase smrti významného človeka (ďalej len VČ) premennými:

najstarší..... x

stredný..... y

najmladší..... z

Napíšeme si rovnice zo zadania:

I.  $x+y+z=66$

II.  $x-y=1$

III.  $x-z=8$

Z tretej rovnice si vyjadrím  $x=8+z$ . Po dosadení dostanem:

I.  $8+z+y+z=66$

II.  $8+z-y=1$

Z druhej rovnice  $y=7+z$ . Po dosadení:

$$8+z+7+z+z=66$$

$$3z+15=66$$

$$3z=51$$

$$z=17$$

$$y=7+z=7+17=24$$

$$x=8+z=8+17=25$$

Keď sa VČ narodil prvý syn, mal 24 rokov. VČ mal teda v čase smrti  $24+25=49$  rokov. Stačí už len odpočítať  $2011-1989=22 \rightarrow 22+49=71$ . VČ by mal dnes 71 rokov.