Vzoráky

<u>Máme tu poslednú sériu tohto ročníka. Chceli by sme vás všetkých preto pozvať na jednodňové sústredenie na našej škole, kde sa vyhodnotí celý ročník súťaže, odmenia sa tí najlepší a budete mať aj špeciálne prednášky od opravovateľov TMS. Všetko sa to uskutoční dňa 20.4.2012.</u> Kvôli väčšiemu napätiu vám však nepošleme po tejto sérii vzoráky a konečné poradie. Tie dostanete spolu s vašimi opravenými riešeniami až na tomto sústredení.
Chcem sa ešte ospravedlniť, ak niekomu nedošla predchádzajúca séria. Posielali sme ju totiž všetkým na školy. Dúfam, že vás to neodradí od riešenia ďalšej série. Taktiež sa ospravedlňujeme za malé problémy s výsledkovou listinou. Na našej stránke by už však malo byť všetko v poriadku.
No a tu sú konečne vzorové riešenia. Príjemné čítanie ☺

<u>Príklad 1: (Jakub)</u>

Označme si strany televízora ako x a y. Vieme, že platí x/y=16/9. Tu si môžem vyjadriť x=y.16/9. Podľa Pytagorovej vety môžem zapísať: $86^2=x^2+y^2$. Za x si dosadíme: x=y*16/9. Dostaneme $7396=y^2*256/81+y^2$; $7396=y^2*((256+81)/81)$; $7396*81/337=y^2$. Obsah plochy teraz vypočítam ako $S=x*y=y^2*16/9=7396*81*16/337*9=1065024/337=$<u>3160,3086 cm²</u>. Je však veľmi dôležité, aby ste čiastkové výsledky nezaokrúhľovali, lebo dostanete dosť nepresné výsledky. Vždy je treba zaokrúhliť až konečný výsledok.

<u>Príklad 2: (Maťo)</u>

Najprv si vypočítame vzdialenosť koncového bodu podstavy a vrcholu s pravouhlého trojuholníka, ktorý tvorí táto vzdialenosť, polomer podstavy a výška. Teda naše hľadané x bude $\sqrt{(2^2+6^2)}=\sqrt{40}=2.\sqrt{10}$ m. Natiera sa iba plášť veží, ktorého povrch vypočítame ako S=pi.r.x, takže plášť jednej veže je $S=4.pi.\sqrt{10}\ m^2$. Takže povrch plášťa všetkých štyroch veží je $4S=16.pi.\sqrt{10}\ m^2$. Na natretie všetkých štyroch veží potrebujeme $36,8.pi.\sqrt{10}$ l a to je cca 366 litrov.

<u>Príklad 3: (Dávid)</u>

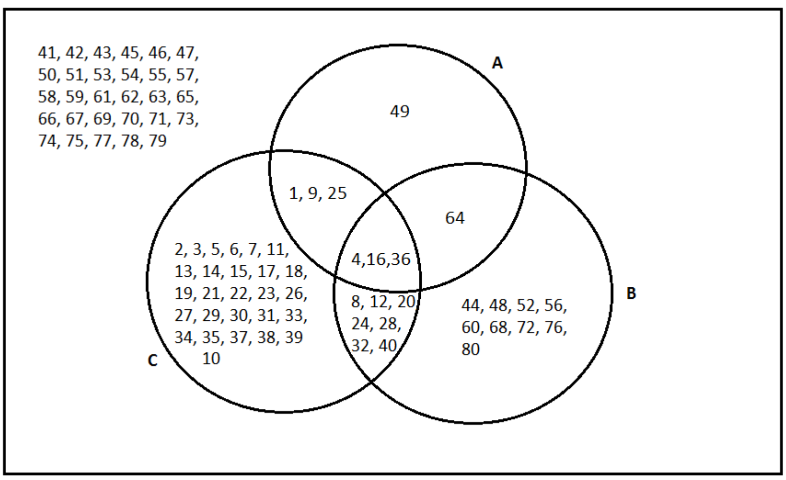
Označme si väčšie písmeno D ako *písmeno D* a menšie ako *písmenko D*. *Písmeno D* bude mať polomer r_v a *písmenko D* polomer r_m. Najskôr bolo treba zistiť, v akom pomere sú tieto dva polomery, resp. ktorý má akú veľkosť. Na to bolo treba použiť Pytagorovu vetu. V obrázku je možné vidieť minimálne dva pravouhlé trojuholníky, no vždy treba aj povedať, prečo sú pravouhlé! Na to väčšina z vás úplne zabudla. Stačilo pritom napísať dve slová: Tálesova kružnica. Ten druhý prípad pravouhlého trojuholníka bol zrejmý.
$(2\cdot r_m)^2=4\cdot r_m^2=r_v^2+r_v^2=2\cdot r_v^2 \rightarrow r_v=\sqrt{2}\cdot r_m$
$r_v^2=r_m^2+r_m^2=2\cdot r_m^2 \rightarrow r_v=\sqrt{2}\cdot r_m$
Ako vidíte, obidvoma spôsobmi sme sa dostali k rovnakému výsledku, a teda $r_v=\sqrt{2}\cdot r_m$. Mohli by sme samozrejme vyjadriť aj čomu sa rovná r_m. To by bolo $r_m=r_v/\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot r_v/2$.
Teraz si treba spomenúť, aký bol vzorček na výpočet dĺžky kružnice… $o=2\cdot pi\cdot r$ .My však počítame len dĺžku polkružnice, teda nám stačí p= o2=$2\cdot pi\cdot r/2= pi\cdot r$.
Je však úplne jedno, ktorý z týchto dvoch vzorčekov použijete, pretože keď to dáte do pomeru, všetko potrebné sa vám tam vykráti, a teda aj tie dvojky, ktorými sme práve delili. Pomer týchto polkružníc je teda $pi\cdot r_v/pi\cdot r_m=pi\cdot\sqrt{2}\cdot r_m/pi\cdot r_m=\sqrt{2}/1$ alebo druhý prípad $pi\cdot r_v/pi\cdot r_m=pi\cdot r_v/(pi\cdot\sqrt{2}\cdot r_v/2)=2\cdot pi\cdot r_v/pi\cdot\sqrt{2}\cdot r_v=2/\sqrt{2}$. Po usmernení zlomku dostávame$2/\sqrt{2}=\sqrt{2}/1$.
Odpoveď: <u>Pomer týchto polkružníc je 2:√2 , resp. √2:1</u>.

<u>Príklad 4: (Dávid)</u>

Obrázok ste si dokázali nakresliť a vyfarbiť všetci, ten tu teda už nebudem rozoberať. Počítajme…
Štvorec má obsah a^2. Kružnica má obsah $pi\cdot a^2$. Stačí vedieť len tieto dva vzorce a už to ide. Ak si celú zafarbenú časť štvorca označíme napr. S_1, dostávame:
$S_1=2\cdot(a^2-pi\cdot a^2/4)=2\cdot a^2\cdot(1-pi/4)=a^2\cdot(4-pi)/2=a^2\cdot(2-pi/2)$. Označme si S_2 nezafarbenú časť štvorca, dopočítame ju pomocou
$S_1:S_2=a^2-S_1=a^2-a^2\cdot(2-pi2)=a^2\cdot(1-2+pi/2)=a^2\cdot(pi/2-1)$
Všetko čo potrebujeme, máme, pustime sa teda do hľadania. No nie nadarmo Janko farbil tie dve časti v štvorci! Tým nám pomohol zúžiť miesto hľadania. Hľadaná hodnota proste nejako súvisí s tou zafarbenou a nezafarbenou časťou v štvorci. Keď neviete čo presne treba hľadať, je to naozaj náročné… ale „Zájsť ďaleko je možné len vtedy, ak nevieme, kam vedie cesta." /Oliver Cromwell/ Ja vám to už teda poviem. „Stačilo" od seba odčítať zafarbenú a nezafarbenú časť (alebo nezafarbenú a zafarbenú?). Jednoducho:
$S_2-S_1=a^2\cdot(pi/2-1)-a^2\cdot(2-pi/2)=a^2\cdot(pi/2-1-2+pi/2)=a^2\cdot(pi-3)$
A toto som od vás chcel! Niektorí ste na to išli aj z druhej strany, no napísať že sa to rovná obsahu kruhu – obsah troch štvorcov bohužiaľ nestačí (a napokon, ono to platí vo všeobecnosti a s naším obrázkom to nijako nesúvisí). Niektorí z vás si s tým poradili viac, niektorí menej… :) <u>Hodnota $a^2\cdot(pi-3)$ zodpovedá ploche, o ktorú je nezafarbená časť štvorca väčšia ako zafarbená časť štvorca.</u> /T. K. - ďakujem za pomoc/

<u>Príklad 5: (Adrián)</u>

Máme 3 otázky s odpoveďami áno a nie. Celkom je to $2^3=8$ možností. Najjednoduchšie sa to rieši cez množiny. Označme si množinu druhých mocnín ako A. Množinu čísel deliteľných štyrmi označíme B. Množina čísel menších ako 41 bude C. Potom si napíšeme čísla do obrázku:



Ak na prvú otázku odpovieme áno, dostaneme čísla v kruhu A. Ak nie, sú to všetky čísla mimo kruhu A. Rovnako to platí aj s množinami B a C. My však hľadáme taký prienik množín, kde je iba jediná možnosť, vtedy totiž už vieme jednoznačne určiť číslo domu. To sú čísla 49 a 64. <u>Dávid mohol určiť číslo 49 alebo 64.</u> Závisí to od toho, čo pán Adamec odpovedal na druhú otázku.

Príklad 6: (Maťo)

Najprv si určím, aký objem ľadu potrebujem. Ihrisko má rozmery 60x34m. To je 2040 m^2. V rohoch sú však „odkrojené“ štvrťkruhy (niektorí by sa mali ísť niekedy pozrieť na hokej alebo aspoň na http://en.wikipedia.org/wiki/Hockey_rink, aby vedeli, ako ľadová plocha vyzerá). Musím preto najprv odpočítať štyrikrát štvorec s rozmermi 7,5x7,5m a potom pripočítať štyrikrát štvrťkruh (spolu teda celý kruh) s plochou $S=pi*7,5^2$. Dostávame teda celú plochu ihriska S=2040-4*7,5*7,5+pi*7,5*7,5 = 1991,71m^2. Ľad s hrúbkou 2 cm má potom objem V=1991,71*0,02 = 39,83m^3. Vieme, že voda po zamrznutí zväčší svoj objem 1,1-krát. To znamená, že pre zistenie celkového objemu potrebnej vody potrebujeme objem ľadu vydeliť 1,1-krát: V_{vody}=39,83/1,1 = 36,21 m^3 = <u>36212,99 litrov vody.</u>

Príklad 7: (Maťo)

V prvočíselnom rozklade každého párneho čísla sa určite nachádza aspoň jedna dvojka. Párnych čísel od 1 do 100 je 100/2=50. Ďalej tu máme čísla deliteľné štyrmi. Tie obsahujú 2 dvojky v prvočíselnom rozklade, ale raz už sme ich pripočítali. Stačí ich už pripočítať iba raz. Týchto čísel je 50/2=25. Rovnako čísla deliteľné 8 majú 3 dvojky v prvočíselnom rozklade, ale dvakrát sme ich už započítali. Týchto je 12. Čísel deliteľných 16 je 6 a tiež ich pripočítame už len raz. Čísel deliteľných 32 je 3 a nakoniec je jedno číslo deliteľné 64. Spolu teda dostaneme 50+25+12+6+3+1=97. <u>V prvočíselnom rozklade čísel od 1 do 100 je teda 97 dvojok.</u>

Príklad 8: (Jakub)

Bohužiaľ, aj v matematike sa niekedy nájdu príklady, ktoré sa nedajú spraviť inak, ako tvrdou silou. Jedným z nich je aj tento. Proste si bolo treba sadnúť a počítať a hlavne sa nepomýliť. Mohli ste si však uvedomiť, že niekedy sa ciferné súčty opakujú. Ale poďme si to teda spočítať. Ciferný súčet minút môže byť: (v zátvorke je napísané, koľkokrát je tento ciferný súčet v minútach) 0(1), 1(2), 2(3), 3(4), 4(5), 5(6), 6(6), 7(6), 8(6), 9(6), 10(5), 11(4), 12(3), 13(2), 14(1). Tu vidíme, že je spolu 60 ciferných súčtov, takže sme nič nezabudli. Teraz rovnakým spôsobom ciferný súčet hodín: 0(1), 1(2), 2(3), 3(3), 4(3), 5(3), 6(2), 7(2), 8(2), 9(2), 10(1). Týchto je 24. Rozoberieme si teraz jednotlivé ciferné súčty hodín: 0: rovnakých alebo menších ciferných súčtov minút – 1; väčších=60-1=59

1: rovnakých alebo menších – 1+2=3; väčších=60-3=57

2: 1+2+3=6; 60-6=54

3: 1+2+3+4=10; 60-10=50

Rovnakým spôsobom počítam všetky. Dostanem teda: 0(59), 1(57), 2(54), 3(50), 4(45), 5(39), 6(33), 7(27), 8(21), 9(15), 10(10).

Tieto čísla teraz vynásobím, koľkokrát je taký ciferný súčet hodín a všetko sčítam: 59*1 + 57*2 + 54*3 + 50*3 + 45*3 + 39*3 + 33*2 + 27*2 + 21*2 + 15*2 + 10*1 = <u>939-krát za deň</u> je ciferný súčet minút väčší ako ciferný súčet hodín.

Príklad 9: (Adrián)

Poďme na tvrdenie: „My sme všetci klamári.“ Nemohli to povedať klamári, lebo by tým povedali pravdu, ale ani pravdovravci, lebo by klamali. Preto to povedali neutráli a je ich tu 30. Vetu „My sme všetci neutráli“ nemohli povedať pravdovravci, teda ju povedali klamári a neutráli, každí po 15. Vetu „My sme všetci pravdovravci“ mohli povedať všetci, teda každý po 10. <u>Spolu teda je 10 pravdovravcov, 25 klamárov a 55 neutrálov.</u>

Príklad 10: (Jakub)

Ako mnohí zistili, zo zadania mohli vyplývať 2 možnosti. Buď Filip spomaľoval úplne od začiatku, alebo až po spomínaných piatich kilometroch. Filip však už mal náskok, keď začal utekať pred Roderikom a až vtedy začal spomaľovať. Okrem toho, keby spomaľoval hneď od začiatku, určite by táto úloha nemohla byť posledná ☺. Zistíme si, koľko prejde Roderik za spomínaných 45 minút. s=v*t=30*0,75=22,5km. Filipovi teda stačilo prejsť už iba 17,5 km za menej ako 45 minút a vyhral. Zistime, za koľko teda prešiel 17,5 km. Prvý kilometer prejde rýchlosťou 60km/h, druhý 57km/h, ... 17. kilometer 12km/h, a posledný polkilometer rýchlosťou 9km/h. Teraz sčítame všetky časy, pričom t=s/v. Výsledný čas je potom t= 1/60+ 1/57+ 1/54+ 1/51+ 1/48+ 1/45+ 1/42+ 1/39+ 1/36+ 1/33+ 1/30+ 1/27+ 1/24+ 1/21+ 1/18+ 1/15+ 1/12+ 0,5/9 = 0,6437 hodiny. To je však menej ako 45 minút a teda <u>Roderik Filipa nedobehne,</u> a vy sa môžete tešiť na pokračovanie príbehu.

Bonus: (Dávid)

Úplne najjednoduchšie riešenie tejto úlohy je ísť na to odzadu. Istý deň bude jazero zaplnené celé (listy predsa jazero niekedy zaplniť musia keďže to jazero nie je nekonečne veľké, že?). A keďže vieme, že každý ďalší deň spadne na jazero presne toľko listov ako bolo deň predtým, je celkom jasné, že deň predtým ako bolo jazero zaplnené celé bolo zaplnené presne do polovice – pretože dve polovice tvoria celok. Fuuu… Jednoduchšie povedané, jazero bude do polovice zaplnené v predposledný deň, keďže posledný deň už bude zaplnené celé. Bonusovou odpoveďou teda je<u>: v predposledný deň.</u>