Vzoráky

Skončil sa nám tretí ročník Tajovského matematického seminára. Napriek tomu dúfam, že to s tou matematikou ešte nevzdáte a že niektorých z vás uvidíme budúci školský rok už ako študentov nášho gymnázia. Všetkým riešiteľom ďakujem za veľmi úspešný ročník a prajem vám veľa vyriešených problémov.
No a tu sú konečne vzorové riešenia. Príjemné čítanie ☺

Príklad 1: (Maťo)

Každým rokom sa posúva dátum o jeden deň dopredu, v prípade priestupného roku o dva. Rozdielom rokov 2012 a 1994 dostaneme počet dní posunu o jeden deň, čiže 2012-1994 =18. Musíme si však uvedomiť, že každý štvrtý rok je priestupný. Tiež vieme že rok 2012 je priestupný. Takže počet priestupných rokov je 5. Náš deň sa preto posunul o 18+5=23 aby sme dostali Pondelok, avšak týždeň ma iba sedem dní takže názov nášho dňa sa posunul iba o 2 dni (23/7=3 zv. 2). Aby sme dostali Pondelok museli sme sa posunúť o dva dni dopredu, čiže deň, ktorý pripadal na rovnaký dátum bola roku 1994 Sobota.

Príklad 2: (Adrián)

29 žiab chytí 29 múch za 29 minút. To znamená, že 29 žiab chytí jednu muchu za jednu minútu. A tu už krásne vidím, že práve 29 žiab chytí aj 87 múch za 87 minút.

Príklad 3: (Maťo)

Ak si označíme dekadický zápis čísla napr. ABC tak potom môžeme uvažovať, že za jedno písmeno si dáme 3. Ak dáme 3 za A dostávame dekadický zápis (ďalej len DZ) 3BC a teraz môžeme za B dať čísla od 0 po 9, ktorých je 10 a zároveň to môžeme urobiť aj pre C. Z tohto vieme že trojciferných čísiel nazačiatku s 3 je 10.10=100. Analogicky spravíme A3C (nula však za A byť nemôže), takýchto čísel je 9.10=90. AB3 = 9.10 = 90. Problémom však je že niektoré možnosti sa nám opakujú a preto ich musíme vylúčiť. Sú to možnosti A33 (9 možností), 3B3 (9 možností lebo jedna sa nám znova opakuje) 33C (9 možností) a 333 (1 možnosť :D) Teraz nám to už len stačí spočítať (9.10+9.10+10.10)-(9+9+9+1)=252.

Príklad 4: (Jakub)

Sekundová ručička sa pohybuje po CELOM okruhu. To znamená, že každú minútu, keď sekundová ručička prechádza celý okruh, určite musí prejsť aj cez miesto, ktoré je osou daného uhla. Tu už vidíme, že toto sa stane každú minútu. Nie však raz, ale rovno dvakrát, pretože hodinová a minútová ručička zvierajú vlastne 2 uhly - menší a väčší (príp. rovnaké). Náš hľadaný jav teda nastane za deň 2*60*24=2440 krát za deň.

Príklad 5: (Dávid)

Tak najskôr si uvedomíme situáciu… Máme geometrickú úlohu a v zadaní sú druhé mocniny. Čo z toho vyplýva? Samozrejme, použijeme Pytagorovu vetu, nakoľko tam určite nájdeme pravouhlé trojuholníky. Keď spustíme kolmicu na úsečku NT cez bod T, na úsečke OR nám vznikne bod, označme si ho K. Je zrejmé, že $|OK| = a$, vzdialenosť $|KR|$ si označíme neznámou x. Ďalej si vzdialenosť $|NO|$ označíme ako y. Nemusím už poznamenať, kde nájdeme pravouhlé trojuholníky, môžeme rovno písať $c^2 = y^2 + (a+x)^2$, $b^2 = y^2 + x^2$. Z oboch rovníc si vyjadríme hodnotu y^2: I.) $y^2 = b^2 - x^2$ II.) $y^2 = c^2 - (a+x)^2$. Ďalej $b^2 - x^2 = c^2 - (a+x)^2$. Z tohto výrazu si vyjadríme x, teda môžeme písať $x = \dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{2a}$.
Po dosadení daných hodnôt dostávame $x = 1 + \sqrt{3}$. Teraz si túto hodnotu dosadíme do I.) , z čoho dostaneme presnú hodnotu $y = \sqrt{1} = 1$. Takže teraz už vieme dĺžky strán, ktoré ďalej využijeme pri počítaní uhlov. Pretože $tg \prec ONR = \dfrac{(a+x)}{y} = \dfrac{(2+\sqrt{3})}{1}$ z tabuliek si zistíme, že $\prec ONR = 75°$. Podobne $tg \prec NOT = \dfrac{a}{y} = \dfrac{1}{1} = 1$. Takže $\prec NOT = 45°$. Tieto uhly sa dajú počítať aj inými goniometrickými funkciami avšak stále sa dostanete k rovnakým výsledkom. Teraz už dopočítame zvyšný uhol v trojuholníku: 180°-75°-45°=60°. Keďže 60° je menej ako 120°, výsledkom tejto úlohy je práve 60°.

Príklad 6: (Maťo)

Najprv si vypočítame objem tehličky (najrozumnejšie v decimetroch kubických), čiže 30cm.14cm.7cm=2,94 dm^3. Teraz musíme vypočítať objem pravidelného šesťbokého hranola. Najprv vypočítame obsah podstavy, ktorá sa skladá zo 6 rovnostranných trojuholníkov zo stranou dĺžky 3 cm. Aby som vedel obsah trojuholníka vypočítam jeho výšku: $v = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{2}{2}\right)^2} = \sqrt{6,75}$ cm. Obsah podstavy potom je $S = \dfrac{6.3.\sqrt{6,75}}{2} = 9\sqrt{6,75}$ cm^2. Objem hranola je $18\sqrt{6,75}$ cm^3. Objem ihlanov vypočítam ako 2.1/3.S.v = $\dfrac{2.6.3.14\sqrt{6,75}}{3.2} = 84\sqrt{6,75}$ cm^3. Celkový objem šperku potom je $102\sqrt{6,75} = 0,265$ dm^3.
Objem odpadu : 2,94-0,265=2,675dm^3. Jeho hmotnosť 2,675.19,6=52,43 kg.

Príklad 7: (Jakub)

Filip má na ruke karty 2 a 6. Prvé dve karty dostal aj Roderik. S rovnakou pravdepodobnosťou to môžu byť tieto možnosti: 1 a 3; 1 a 4; 1 a 5; 3 a 4; 3 a 5; 4 a 5. Každú s týchto kombinácií mohol mať s pravdepodobnosťou P=1/6. Potom si Roderik potiahol ešte jednu kartu. V každom prípade mal na výber ešte z troch možností. Celkovo mal teda Roderik 6*3=18 možností, každú z rovnakou pravdepodobnosťou. Potom si ťahá Filip. Ostávajú na stole ešte 2 karty. Môže si každú potiahnuť s rovnakou pravdepodobnosťou. A celkovo je potom 18*2=36 možností ako môže hra dopadnúť. Keď si všetky tieto možnosti preberieme, zistíme, že až v 21 prípadoch vyhrá Filip. Filip má teda pravdepodobnosť na výhru P=21/36 = 7/12 = 58,33%.

Príklad 8: (Adrián)

Súčin vekov dcér je 72. Preto mohli byť tieto možnosti:

Veky	Súčin	Súčet
1.1.72	72	74
1.2.36	72	39
1.3.24	72	28
1.4.18	72	23
1.6.12	72	19
1.8.9	72	18
2.2.18	72	22
2.3.12	72	17
2.4.9	72	15
2.6.6	72	14
3.3.8	72	14
3.4.6	72	13

Keďže pánovi inšpektorovi nebola ani druhá informácia postačujúca aj keď vedel číslo domu, musel byť súčet vekov rovnaký. Veky dcér potom mohli byť 2, 6 a 6, alebo 3, 3 a 8, teda súčet 14. Ale inšpektor sa dozvedel, že najstaršia dcéra má mačku. Keby však mali dcéry veky 2, 6 a 6, tak nevieme určiť, ktorá je najstaršia, preto majú dcéry vek 3, 3 a 8.

Príklad 9: (Dávid)

Úplne najprv zo všetkého si môžeme označiť stredy ako S_1 a S_2. Vieme, že každá má polomer 1, čiže aj veľkosť úsečky $|S_1,S_2|$ je rovná 1. A teraz poďme hľadať tie dĺžky… Malo by vám byť jasné, že tie kružnice nie sú v zadaní len tak pre nič za nič, myslím že každý si vie narysovať úsečku hocijakej dĺžky. Tu však išlo o to, aby ste tie dĺžky našli niekde ukryté práve v týchto dvoch kružniciach. Mali ste síce dané len dva body, no nik vám nezakázal dokresliť ďalšie. Ale aj tu treba dať pozor na to, aby to boli nejaké význačné body, nie len hocijaké ľubovoľne na kružnici. Mal by to byť nejaký priesečník alebo niečo podobné. Takže… úplne ideálne si je urobiť dve kolmice na priamku S_1 S_2, a to práve tie dve, ktoré prechádzajú týmito stredmi. Tým sme dostali dokopy 4 ďalšie priesečníky, ktoré nám plne postačujú na to, aby sme túto úlohu dotiahli do úspešného konca. Samozrejme nemôžeme zabudnúť na ďalšie dva priesečníky, ktoré vznikli ako prienik týchto dvoch kružníc. Jediná „matematická vec“, ktorú potrebujeme k vyriešeniu tejto úlohy sa volá Pytagorova veta. Je to možno zrejmé už zo zadania, pretože sa nám tu vyskytli druhé odmocniny. Existuje niekoľko postupov, ako sa dopracovať k správnym výsledkom, sem vám napíšem asi tento: Začnime uvažovať, ako by sme mohli dostať hodnotu √2 pomocou Pytagorovej vety. Pričom polomer kružníc je 1. Samozrejme, √(1+1)=√2. Teda √2 je dĺžka prepony v pravouhlom trojuholníku s odvesnami dlhými 1. V obrázku využijeme stredy kružníc a priesečník kružnice so spomínanou kolmicou. S √3 je to asi najzložitejšie. Ale je to asi najkrajšia úsečka… to je však už vec názoru. No… Možno ste sa už aj učili, akú veľkosť má výška v rovnostrannom trojuholníku. Pripomeniem: a*√3/ 2, kde a je dĺžka strany (všeobecne). A túto dĺžku nám už len stačí vynásobiť 2 a máme √3. Úžasné! No a kde nájdeme rovnostranné trojuholníky? Predsa vo vnútornej časti prieniku tých dvoch kružníc. Všetko sú tam polomery, ktoré sú rovnaké, a keď tam pospájame všetko so všetkým, dostaneme dva rovnostranné trojuholníky, ktoré sú tak inteligentne umiestnené, že ich dané výšky sú na jednej priamke a tým vytvoria úsečku dvojnásobnej dĺžky. A máme to. √3 je teda úsečka spájajúca prieniky týchto dvoch kružníc. A ako poslednú sme mali √5. Opäť sa zamyslíme nad Pytagorovou vetou, ktorá nám prezradí, že $\sqrt{(2^2+1)}=\sqrt{5}$. A obidve dĺžky predsa máme. Polomer má veľkosť 1 a priemer je dvojnásobkom polomeru. Žiadny problém! V obrázku to zodpovedá pravouhlému trojuholníku, ktorého vrcholy sú priesečníky kružníc s kolmicami. Samozrejme len 3 z tých 4 :) Tak toto som od vás chcel! Mnohí ste tie úsečky nezakomponovali do tých kružníc, no princípu ste snáď už pochopili…

Príklad 10: (Jakub)

Iste niektorí z vás už riešili a vyriešili takzvanú Einsteinovu hádanku. Tento typ úloh sa nazýva „Zebra“. Ide o postupné vypĺňanie políčok podľa zadaných údajov. Má skutočne veľa variant a dá sa vymyslieť skoro na všetko. Vynikajúci generátor týchto „zebier“ sa nachádza na stránke http://www.mensus.net/brain/logic.shtml. Práve na tejto stránke som aj ja vygeneroval zebru podľa skutočných údajov.
K samotnému riešeniu nemám čo povedať. Zebry sa riešia iba logickým dopĺňaním a len ťažko sa dá opísať správny návod. Skoro všetci ste mali túto úlohu bezchybne, a tí, čo ju tak nemali, iste jednoduchým myslením zistia, kde sa prepočítali. Len pre info: správne riešenie malo vyzerať nasledovne:

Aďo	Dávid	Jakub	Maťo
Štúrovo	Banská Bystrica	Vlkanová	Stará Sásová
Rybičky	Kocúr	Papagáj	Mačka
Šach	Parkour	Hokej	Florbal
Kofola	Voda	Čaj	Káva