

4. ROČNÍK TMS 2012/2013 - RIEŠENIA

1. SÉRIA

1.

Mysli si číslo. Pripočítaj k nemu 42, odpočítaj myslené číslo a vynásob dvomi. Zopakuj postup s ďalšími číslami niekoľko krát. Aké najväčšie číslo si dostal?

RIEŠENIE:

Označme si myslené číslo ako x . Potom podľa zadania dostaneme $[(x + 42) - x] \cdot 2$ čo sa rovná 84 nezávisle od zvoleného x . Teda najväčšie a jediné číslo aké je možné dostať je 84.

2.

Vieme, že pre reálne čísla a, b platí, že $a > b$. Pre ktoré a, b platí aj $a^2 > b^2$?

RIEŠENIE:

Ak $a > b$ potom $a - b > 0$

Ak $a^2 > b^2$ potom $a^2 - b^2 > 0$ teda $(a - b) \cdot (a + b) > 0$

Aby mohlo platiť $(a - b) \cdot (a + b) > 0$ tak $a - b$ ani $a + b$ sa nesmie rovnať nule.

$a - b > 0$ a $a + b > 0$ teda $a > -b$

Takže nerovnosť $a^2 > b^2$ platí pre také a a b ($a > b$), že $a > -b$ alebo inak zapísané $|a| > |b|$

3.

Štyria turisti chcú ísť na exkurziu. Vstupné na jednu osobu je 5 kopejok. Prvý turista má dve 10 kopejkové mince, druhý má 20 kopejkovú mincu, a tretí a štvrtý majú každý po jednu 15 kopejkovú mincu. Ako majú zaplatiť, keď pri pokladni nevydávajú, nerozmieňajú a nesmú si ostať navzájom dlžní?

RIEŠENIE:

Aby štyria turisti zaplatili presne a neboli si nič dlžní musíme prísť na správny postup akým si vymieňali kopejkové mince. Jednoznačne môžeme začať tým že 3. vymení 15 kopejok za 10 kopejok 1. turistu. Tým pádom 3. turista už dal za seba 5 kopejok a nie je nikomu nič dlžný. 1. turista má teraz o 5 kopejok viac a teda dá 10 kopejkovú mincu 4. turistovi (tým pádom 1. má zaplatených svojich 5 kopejok). Keď 4. turista dá svojich 15 kopejok 2. turistovi, ostane mu 10 kopejok (ktoré dostal od 1.) a 2. turista dá za vstupenky svojich 20 kopejok a ostane mu 15 kopejok (ktoré dostal od 4. turistu).

4.

Otec má 31 rokov a dvoch synov. Prvý syn má 5 a druhý syn má 10 rokov. O koľko rokov budú mať synovia dokopy toľko rokov, koľko bude mať otec?

RIEŠENIE:

Každým rokom otec zostarne o 1 rok a jeho synovia dokopy o 2 roky. Teda:

$$31 + x = (10+5) + 2x$$

-pričom x je počet uplynulých rokov

Z tejto rovnice nám vyjde že $x=16$, teda synovia budú mať dokopy rovnako rokov ako bude mať ich otec za 16 rokov.

5.

Vyberte si číslo v prvom riadku a ostatné čísla v rovnakom riadku a stĺpci vyškrtnite. Vyberte číslo v druhom riadku (nemôže to byť jedno z už vyškrtnutých) a zase vyškrtnite ostatné čísla v príslušnom riadku a stĺpci. Takto vyberte aj čísla z tretieho a štvrtého riadku. Tieto štyri čísla spočítajte. Aký výsledok vám vyšiel a prečo?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

RIEŠENIE:

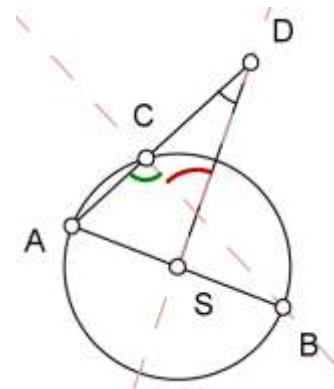
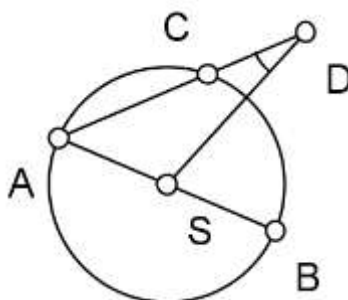
Tabuľku zo zadania si môžeme zapísať ako:

$0+1$	$0+2$	$0+3$	$0+4$
$4+1$	$4+2$	$4+3$	$4+4$
$8+1$	$8+2$	$8+3$	$8+4$
$12+1$	$12+2$	$12+3$	$12+4$

Teda pri vyberaní čísel vôbec nezáleží na tom ktoré vyberieme, vždy to bude v tvare $0+4+8+12$ (za riadky) $+1+2+3+4$ (za stĺpce, v akomkoľvek poradí podľa výberu čísel ktoré však nič nezmení). Teda nezávisle na vybraných číslach vždy vyjde výsledok 34.

6.

Na obrázku je S stredom úsečky AB , k je kružnica so stredom S . Vieme že uhol $\angle ADS$ má veľkosť $27^\circ 42'$. Zisti uhol ktorý zvierajú priamky CB a SD .



RIEŠENIE:

Na základe Tálesovej vety vieme že trojuholník ABC má pravý uhol na vrchole C . Teda uhol $\angle DCS$ je tiež pravouhlý keďže je susedný s uhlom $\angle ACB$. Jednoduchým doplnením uhlov trojuholníka CDX do 180° zistíme uhol aký zvierajú priamky SD a BC . Správnou odpoveďou teda je $62^\circ 18'$ ale správnou odpoveďou je aj $117^\circ 42'$, susedný uhol $\angle CXD$. Pre uznanie úlohy za správne vyriešenú stačilo napísať jeden z týchto uhlov.

7.

Martin a Juraj vyhrali v lotérii poukážku na 50 pudingov, ktoré si samozrejme ihneď vybrali a s chuťou sa do nich pustili. V prvý deň zjedol Martin $\frac{3}{4}$ z množstva pudingov, ktoré v prvý deň zjedol Juraj. V druhý deň zjedol Juraj $\frac{1}{2}$ z množstva pudingov, ktoré zjedol Martin v ten istý deň. Tretí deň zjedol Martin $\frac{2}{3}$ z množstva, ktoré v tretí deň zjedol Juraj. Pudingy vždy zjedli celé. Ďalej vieme, že najviac pudingov sa zjedlo v druhý deň a najmenej počas prvého dňa. Zistite, koľko pudingov zjedol Martin dokopy.

RIEŠENIE:

$$P = J_1 + M_1 + J_2 + M_2 + J_3 + M_3$$

$$M_1 = \frac{3}{4} J_1 \quad M_2 = 2 J_2 \quad M_3 = \frac{2}{3} J_3$$

$$(J_1 + \frac{3}{4} J_1) + (J_2 + 2 J_2) + (J_3 + \frac{2}{3} J_3) = 50$$

$$21 J_1 + 36 J_2 + 20 J_3 = 600$$

$$36 J_2 > 20 J_3 > 21 J_1$$

Dostávame dve trojice celočíselných riešení: $J_{1a} = 8$; $J_{2a} = 7$; $J_{3a} = 9$ a $J_{1b} = 4$; $J_{2b} = 11$; $J_{3b} = 6$.

Riešeniami teda sú $M_a = 26$ a $M_b = 29$.

8.

Pred sebou mám päť čísel: 1, 2, 3, 4, 5. Koľko rôznych nepárnych štvorciferných čísel z nich môžem vytvoriť, ak sa žiadna cifra v čísle nesmie opakovať?

RIEŠENIE:

Všetkých možností (párnych aj nepárnych) by bolo 5!. Dá sa to zapísať aj ako $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ spôsobom:

Na prvé miesto môžeme dať jedno z piatich čísel. Na druhé už však len jedno zo štyroch keďže jedno je už použité. Na tretie miesto teda pôjdu 3 čísla a na štvrté ostávajú 2 čísla. Keďže však chceme nájsť len nepárne možnosti musíme začať tým že na štvrté miesto môžu ísť len 3 čísla a to 1, 2 a 5. Potom doplníme zvyšné miesta a vyjde nám $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$. Výsledok teda bude 72.

9.

Predavač nápojov Maťo objavil tajný recept na mathdžús. Raz ho však pri jeho príprave sledoval špión Tony. Tony si zaznamenal jeho postup:

1. Pripravil si 3 nádoby, v každej 4 litre tekutiny. (v 1. nádobe mal tekutinu A, v 2. nádobe mal tekutinu B, a v 3. nádobe mal tekutinu C)
2. Potom preliat 1l z 1. nádoby do 2. nádoby a dobre premiešal.
3. Potom 1l zmesi z 2. nádoby nalial do 3. nádoby a premiešal.
4. Potom 1l zmesi z 3. nádoby vrátil naspäť do 2. nádoby, premiešal a 1l zmesi z 2. nádoby vrátil do 1. nádoby.
5. V 1. nádobe mu vznikol mathdžús.

V akom pomere boli tekutiny v mathdžúse?

RIEŠENIE:

1.		2.		3.		1.		2.		3.
								1A		
4A		4B		4C		3A		4B		4C
1.		2.		3.		1.		2.		3.
				0,2A				0,84A		0,16A
		0,8A		0,8B				3,36B		0,64B
3A		3,2B		4C		3A		0,8C		3,2C
1.		2.		3.						
3,168A		0,672A		0,16A						
0,672B		2,688B		0,64B						
0,16A		0,64C		3,2C						

Zložky v prvej nádobe vyšli v pomere 3,168 : 0,672 : 0,16 alebo 99 : 21 : 5. Avšak akceptované boli všetky výsledky pokiaľ spĺňali podmienku, že tekutiny A bolo v miedžuse 79,2 %, B 16,8% a C 4 %.

10.

Hodinová ručička spolu s minútovou ručičkou smerujú na juh. Za koľko minút budú obe naraz ukazovať na východ? Uvažujme že hodinová ručička sa posunie až keď minútová obehne celé kolo a sever je daný ako čas 12:00.

RIEŠENIE:

Keď obe ručičky týchto hodín ukazujú na juh je práve 6:30. Keď budú obe ukazovať na východ, bude 3:15, teda uplynie 8 hodín aj 45 minút čo je 525 minút.

Bonus:

V šprinte na 100m som predbehol iba posledného. Koľký som skončil?

RIEŠENIE:

Aby som mohol predbehnúť posledného musím byť za ním a to je jedine možné ak ho obehnem o celé kolo. Avšak šprint na 100m sa beží len na krátkej rovnej dráhe a teda odzadu dobehnúť posledného nie je možné.