4. ROČNÍK TMS 2012/2013 – RIEŠENIA

2. SÉRIA

1.

Nájdite čísla *a*, *b*, *c* na číselnej osi, tak aby pre ne platili tieto dve pravidlá: $a>b>c$ a $a^2<b^2<c^2$.

RIEŠENIE:

Aby platilo $a>b>c$ a zároveň $a^2<b^2<c^2$, musí platiť jedna z trojíc podmienok:
$a>0\,; b<-a\,; c<b$ alebo $a\leq 0\,; b<a\,; c<b$.

Pri splnení ktorejkoľvek z trojíc podmienok budú vždy splnené obe nerovnosti zo zadania.

2.

Je daná kružnica k so stredom v bode S. Dve rovnobežné priamky p a q. Priamka p pretína kružnicu k v bodoch A a B a priamka q pretína kružnicu v bodoch C a D. $|AS|=|SD|$. Na kružnici medzi bodmi A a B zvolíme bod F. Priamka r prechádza cez body A a F a priamka s prechádza cez body B a D. Tieto dve priamky zvierajú uhol 15°. Určte uhol, ktorý zvierajú AD a DF.

RIEŠENIE:

V tomto príklade sme spravili chybu my, a tak sme sa rozhodli udeliť zaň najviac 2 body pre tých, ktorí napísali aspoň niečo rozumné. Chyba, ktorú ste skoro všetci spravili, bola tá, že ste predpokladali, že trojuholník ADX je rovnoramenný. Toto tvrdenie je ale nepravdivé a tak ste prišli na nesprávny výsledok. V tomto príklade sa ukázalo, že sa naozaj opatí poslať akékoľvek vaše riešenie (aj také, že daná úloha nemá riešenie).

3.

V ročníku je 200 študentov. Vieme o nich, že 140 sa učí anglický jazyk, 80 sa učí nemecký jazyk a 20 sa neučí ani jeden z týchto jazykov.

a) Určte, koľko študentov hovorí anglickým a nemeckým jazykom súčasne.

b) Uvažujme, že z týchto 200 študentov sa niektorí učia aj francúzsky jazyk. Vieme že dokopy je francúzsky hovoriacich študentov 40 a že 5 študentov z celkového počtu sa neučí ani francúzštinu, ani nemčinu, ani angličtinu. Stačia nám všetky známe údaje na to, aby sme dokázali určiť, koľko študentov sa učí všetky tri jazyky naraz?

RIEŠENIE:

a)

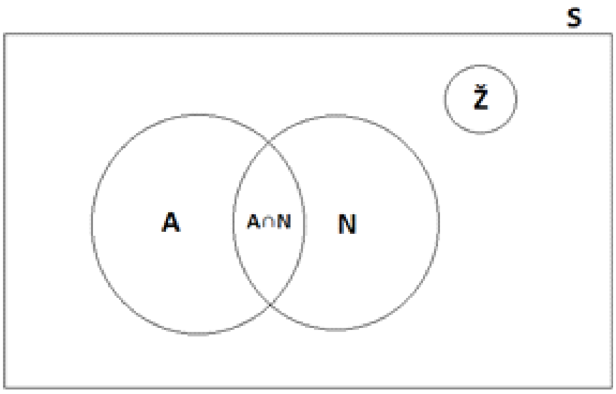
200 študentov

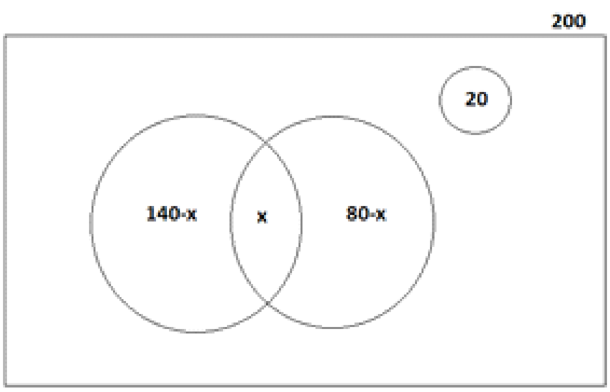
140... ANJ

80... NJ

20... ani jeden jazyk

x... AJ+NJ





Na základe diagramu si spravíme rovnicu:

$$S - \check{Z} = A + N - A \cap N$$
$$200 - 20 = 140 + 80 + A \cap N$$
$$A \cap N = 40$$

40 študentov sa učí anglický a zároveň nemecký jazyk.

b)

40... FRJ

5... ani jeden jazyk

x... všetky jazyky súčasne

Keďže z časti a.) vieme, že 20 študentov sa neučí ani AJ ani NJ, títo študenti sa učia FRJ. Odpočítame však od nich 5, ktorí ako máme v zadaní sa neučia ani jeden jazyk.

$$20 - 5 = 15$$

Tým pádom vieme, že samotnú FRJ sa učí 15 žiakov. Celkovo ich je 40, tzn. 40 – 15 = 25 žiakov, ktorí sa učia kombináciu AJ+FRJ alebo NJ+FRJ alebo AJ+NJ+FRJ. V zadaní však nemáme žiadne ďalšie informácie, a tak nevieme posúdiť koľko žiakov sa učí kombináciu AJ+NJ+FRJ. Vieme však určiť že toto číslo bude z intervalu $\langle 0;25 \rangle$.

4.

Máme CD, ktoré ma priemer 15cm a v ňom je kruhová dierka s priemerom 2cm. Malý Jožko sa rozhodol, že si na toto CDčko nakreslí postavičky z Doby Ľadovej aby vedel, že na tom CDčku má tento film. Zistil však, že sa mu tam všetky nezmestia a potreboval by 2-krát väčšiu plochu na nakreslenie. Aký polomer by malo CDčko, ak by malo dvakrát väčšiu plochu na nakreslenie postavičiek? Polomer kruhovej dierky je stále 2 cm.

RIEŠENIE:

S1 – plocha CD

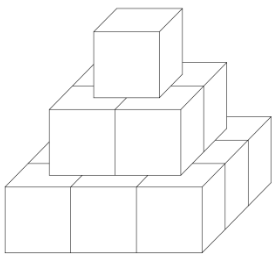
S2 – plocha veľkého CD + stredná dierka

$$S_1 = 7{,}5^2 \pi - \pi$$
$$S_1 = 55{,}25 \pi cm^2$$
$$S_2 = 2 * (55{,}25 \pi) + \pi$$
$$S_2 = 111{,}5 \pi cm^2$$
$$r = \sqrt{\frac{111{,}5 \pi}{\pi}}$$
$$r = 10{,}56 cm$$

Polomer väčšieho CD by bol 10,56 cm.

5.

Takáto pyramída sa skladá z kociek s hranou 1 cm. Pyramída na obrázku má 3 poschodia a povrch 42 cm^2. Koľko poschodí má pyramída, ktorá má povrch 506 cm^2?



RIEŠENIE:

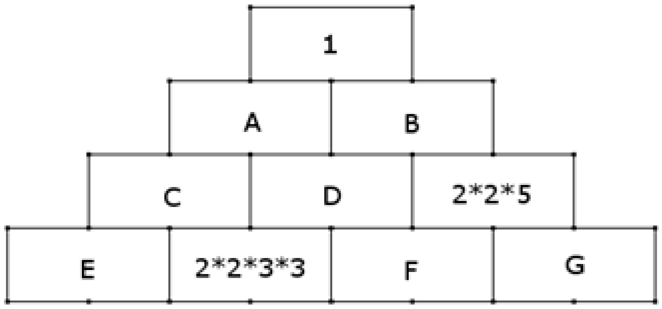
Tento príklad sa dá vyriešiť postupným vypisovaním si a počítaním všetkých plôch, tak mojou úlohou je si to čo najviac zjednodušiť. Keďže sú to kocky s hranou 1cm ich jedna stena bude 1*1 teda 1cm2. Prvé poschodie má jednu kocku. Poschodia sa vždy zväčšujú o jednu kocku na dĺžku, takže posledné poschodie má toľko kociek na dĺžku koľko je poschodí. Počet poschodí sa si označím písmenkom n, takže podstava bude mať n2 cm2, lebo všetky poschodia sú v tvare štvorca. Keď si všimnem, to čo vidíme zhora sa rovná tomu čo vidíme zdola(podstave), tak mi to uľahčí počítanie, lebo v tomto prípade je to dvakrát podstava, teda 2n2. Teraz už stačí zistiť obsah toho, čo vidíme zo strán. Môžem si to rozdeliť na poschodia, prvé má jednu kocku na dĺžku a 4 strany, teda 4-krát jedna stena, takže 4*1cm2. Druhé poschodie má dve kocky na dĺžku, teda z jednej strany 2cm2 a zo 4 strán je to 4*2cm2. 3. Poschodie, 3 kocky na dĺžku, z jednej strany 3cm2, zo 4 strán 4*3cm2. Takto to pôjde 4*4cm2, 4*5cm2 až po posledné poschodie, tam kde je n kociek na dĺžku to bude 4*n cm2. Takto to môžem spočítať: 4*1 + 4*2 + 4*3 + ... + 4*n. Vidím, že 4 sa dá vyňať, a tak vzniká 4*(1+2+3+ ... +n). Teda stačí spočítať čísla od jedna po n, vynásobiť ich 4 a potom pripočítať dvakrát podstavu (to čo vidím zhora a podstava), preto 4*(1+2+3+...+n) + 2n2. Do tohto vzorca si dosadím počet poschodí a skúšam ktorý povrch vyjde 506cm2, takto zistím, že n=11. Preto keď má takáto pyramída povrch 506cm2, bude mať 11 poschodí.

6.

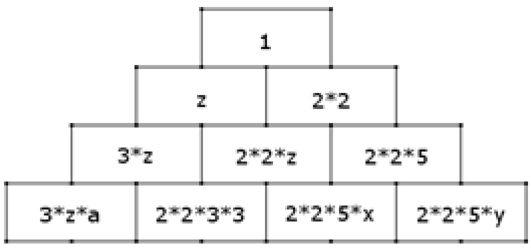
Doplňte do tejto číselnej pyramídy čísla tak, aby číslo v rámčeku bolo najväčším spoločným deliteľom dvoch čísel, ktoré sú napísané v rámčekoch pod ním.

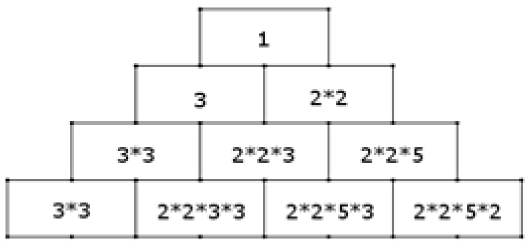
RIEŠENIE:

Tento príklad má veľmi veľa riešení, ale stačilo ak ste nepísali ako ste sa dostali k jednému z nich.



Čísla, ktoré sú vpísané do pyramídy si rozpíšem na súčin prvočísel, tak ako je na obrázku, pomôže mi to, keď budem hľadať najväčšieho spoločného deliteľa (NSD). Čísla, ktoré nepoznám si napíšem ako písmená, aby sa v tom dalo lepšie vyznať. 20 je nad číslami F a G, teda bude ich NSD. Preto ich bude deliť a tieto dve čísla budú obsahovať v ich prvočíselnom rozklade tiež 2*2*5. Ale môžu tam byť aj iné číslo v rozklade na prvočísla, ale nemôžu tam byť rovnaké, aby nebol NSD iný, takže F = 2*2*5*x a G =2*2*3*y. x a y sa môžu skladať z viacerých prvočísel, ale ani z jedného rovnakého. Môžu sa obidve rovnať jednej, lebo v zadaní nebolo, že by sa čísla nemohli opakovať. Ja si napríklad môžem za x dosadiť 3 a za y 2, tak ako to je na obrázku 3. V ďalšom kroku zistím NSD 2*2*3*3 a F(2*2*5*x), vidím, že 2*2 je určite rovnaké a podľa toho aké je x také bude ďalšie prvočíslo, z ktorého bude zložené číslo D. Ak bude zložené z nejakého ktoré je aj v 2*2*3*3, teda v 3*3, tak bude väčšie, tak to zapíšem ako 2*2*z. Ja som si dosadila namiesto x trojku a tá sa nachádza v čísle 2*2*3*3, tak teraz bude z=3 a D=2*2*3. Teraz, keď viem D, tak zistím B, lebo je to NSD D(2*2*z) a 2*2*5. z sa nikdy nebude rovnať 5, lebo by to potom nebol deliteľ 2*2*3*3, takže namiesto B môžem vždy napísať 2*2, lebo iba to majú vždy spoločné D a 2*2*5. Aj v mojom riešení z danými číslami bude teda 2*2. Keď NSD čísel A a B je 1, tak nebudú mať žiadne spoločné prvočíslo teda deliteľa, takže číslo A neobsahuje nič z 2*2. Ale A aj B je deliteľ D, takže A bude mať niečo z D to čo nie je v B, tam nie je z, takže niečo zo z alebo z. Keďže tam môže byť celé z, tak A=z. V mojom riešení je z=3, takže namiesto A napíšem 3. Viem, že A je deliteľom C aj D, takže to čo je v A tak bude aj v C, to číslo z, ale C je deliteľom 2*2*3*3, tým je aj z, lebo z sa objavuje aj v D a D je tiež deliteľ 2*2*3*3. V čísle C nemôže byť 2*2, lebo by sa číslo A zmenilo keďže 2*2 je aj v čísle D. Teda v C je z, ale môže tam byť hocičo iné čo je v 2*2*3*3 okrem 2*2. Napríklad 3, preto C=3*z. V mojom riešení keďže z=3, tak namiesto C doplním 3*3. Na posledné číslo E vplývajú C a 2*2*3*3, C je deliteľom E, takže čo je v C bude aj v E. Keďže v C nie je 2*2 nemôže byť ani v E. Preto C bude číslo zložené z 3*z*a a to a je číslo, ktoré v prvočíselnom rozklade nemá nič z 2*2. V mojom riešení z=3 , takže 3*3 a a sa môže rovnať jednej, tak teraz to tak napríklad môžem dať. Teda E=3*3. Toto je jedno z mnohých riešení ako sa dostať k správnemu riešeniu.





7.

Riaď sa pokynmi z vývojového diagramu na samostatnom papieri.

RIEŠENIE:

4 (+3) 7 (Nie > *2) 14 (Nie > -6) 8 (+3) 11 (Nie > *2) 22 (Nie > -6) 16 (+3) 19 (Nie > *2) 38 (Nie > -6) 32 (+3) 35 (Nie > *2) 70 (Áno > /10) 7 (+3) 10 (Áno > -3; x2) 49 (Nie > /10; pokračujem so zvyškom) 9 (Nie > +10) 19 (-3; x2) 256 (Áno > Ciferný súčet) 13 (Nie > +1; /2) 7 (Ciferný súčet) 7 (Nie > +1; /2) 4 (Ciferný súčet) 4 (Áno).

Na otázky sme odpovedali „Nie“ 11-krát.

8.

Máme cisternu v tvare valca s polomerom podstavy 1m a dĺžkou 4m. Je naplnená vodou, ktorá siaha do troch štvrtín jej výšky. Vypočítajte objem naplnenej časti.

RIEŠENIE:

Počítajme s cisternou, ktorá stojí. Vzorec na výpočet objemu valca je $V = S_p * v_h$, pričom v prípade kruhu sa $S_p = \pi r^2$ a výšku máme danú v zadaní. Vzorec na výpočet objemu valca je teda $V = \pi * r^2 * v_h$. Keďže chceme vedieť objem cisterny naplnenej len do ¾ svojej výšky, upravíme si vzorec na $V = \pi * r^2 * \frac{3}{4} * v$ Dosadíme si do vzorca r = 1m , v_h = 4m.

$$V = \frac{3}{4} \pi * r^2 * v$$

$$V = \frac{3}{4} \pi * 1^2 * 4$$

$$V = 3\pi$$

$$V = 9{,}42\, m^3$$

Objem cisterny naplnenej do ¾ svojej výšky je 9,42 m3.
Jeden z vás pochopil a vypočítal úlohu úplne inak ako ostatní. Také to riešenie bolo oveľa ťažšie ako normálne, preto mu udeľujeme viac bodov ako je plný počet, keďže plný počet dostali aj tí čo to pochopili príklad jednoduchšie.

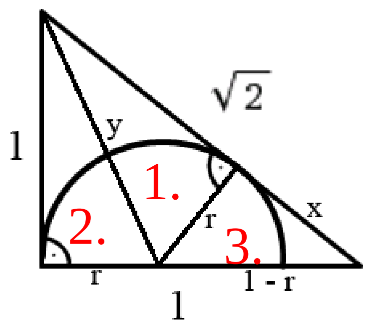
9.

Určte plochu polkruhu vpísaného tomuto pravouhlému rovnoramennému trojuholníku.

RIEŠENIE:

Pre trojuholník č. 1. vieme podľa Pytagorovej vety vyjadriť hodnotu $r = \sqrt{y^2 - (\sqrt{2} - x)^2}$, pre trojuholník č. 2 zase: $r = \sqrt{y^2 - 1^2}$. Z týchto údajov vieme vyjadriť hodnotu $x = \sqrt{2} - 1$. Pre trojuholník č. 3 platí: $r^2 + x^2 = (1 - r)^2$, z čoho ekvivalentnými úpravami dostávame: $r = \frac{1 - x^2}{2}$

Keďže hodnotu x už poznáme ($\sqrt{2} - 1$) a dokážeme vyjadriť aj polomer kruhu: $r = \sqrt{2} - 1$.



Potom nám už len ostáva vypočítať obsah kruhu s týmto polomerom a vydeliť ho dvoma:

$\frac{S}{2} = \frac{\pi r^2}{2}$, z čoho po dosadení dostávame: $\frac{S}{2} \cong 0{,}2695$.

10.

Máme šachovnicu 4x4 (ako na obrázku). Vyplňte ju obdĺžnikmi 2x1 pričom vyplníte celú plochu šachovnice a na vyznačené políčka nemôžete položiť obdĺžnik.

RIEŠENIE:

Keďže ste skoro všetci našli a aj dokázali riešenie pre daný štvorec 4x4, tak si ukážeme aj všeobecné riešienie, na ktoré prišiel len 1 z vás. Takže pre začiatok si celý štvorec ofarbime striedavo čiernou a bielou ako šachovnicu. Takže po položení obdĺžnika 2x1 na takúto plochu môžeme s určitosťou tvrdiť, že bude zaberať 1 biele a 1 čierne políčko. A teda ak plochu vyložíme n obdĺžnikmi 2x1, tak pokryjeme n čiernych a n bielych políčok. Ale v našom prípade sme odobrali 2 políčka, ktoré boli diagonálne od seba, a teda to boli 2 biele políčka (ony môžu byť aj čierne, ale to by sme museli zmeniť značenie). Z toho vyplýva, že na štvorci s hranou a je a*a/2 čiernych a a*a/2-2 bielych. Z toho vyplýva, že sa daná plocha nedá zaplniť obdĺžnikmi 2x1.