4. ROČNÍK TMS 2012/2013 – RIEŠENIA

3. SÉRIA

1.

Opravovatelia TMS si chcú zvoliť jedného zodpovedného za vzorové riešenia, jedného za výsledkovú listinu a jedného za nové zadania. Koľkými spôsobmi to môžu spraviť, ak ich je 6, Mrož nechce byť zodpovedný za vzorové riešenia a nikto nemôže mať viac funkcií naraz?

RIEŠENIE:

Keďže chceme do každej jednej z 3 pozícii obsadiť jedného zo skupiny 6 opravovateľov a Mrož nechce mať na starosti vzorové riešenia, tak najskôr určíme, kto má na starosti vzorové riešenia. Keďže ich Mrož nechce mať na starosti, tak vyberáme jedného z 5 ľudí, kto bude mať toto na starosti. Takže pre nasledujúcu pozíciu nám jeden človek ubudol (ten, čo má na starosti vzorové riešenia) a jeden pribudol (Mrož). Preto na ďalšiu pozíciu je 5 uchádzačov. Keď z nich jedného vyberieme, tak na poslednú pozíciu vyberáme jedného zo 4. A teda výsledok je $5 \times 5 \times 4 = 100$.

2.

Na kružnici sú dané body A1, A2, A3, ... A12, ktoré sú rôzne. Vypočítajte:
a) Počet tetív určených týmito bodmi.
b) Počet trojuholníkov s vrcholmi v týchto bodoch.

RIEŠENIE:

Na kružnici sú dané body A1, A2, A3, ... A12. Vypočítajte:
a) Počet tetív určených týmito bodmi.
b) Počet trojuholníkov s vrcholmi v týchto bodoch.

a) V tomto príklade ide o kombinatoriku, kde vytvárame dvojice. Keďže vieme, že sa nám páry nemôžu opakovať (tetiva $A_1 A_2$ je to isté ako $A_2 A_1$) tak vieme povedať, že každý bod sa spája s ostatnými, ale pri každom ďalšom bode je o jednu možnosť menej, pretože nerátame tie, ktoré sa s nimi spojili predtým. Takže využijem faktoriály a to naledovne:

$$C(2,12) = \frac{12!}{2! \times 10!} = 66$$

pričom $12!$ je počet všetkých bodov, $2!$ nám označuje že ide o dvojice a $10!$ je počet nepoužitých dvojíc (keďže sa nesmú opakovať).

b) Tu zase zisťujeme všetky možné trojice, bez toho že by sa opakovali (a opäť - trojuholník $A_1 A_2 A_3$ je to isté ako $A_3 A_2 A_1$), takže vzorec bude:

$$C(3,12) = \frac{12!}{3! \times 9!} = 220$$

pričom $12!$ je zase počet bodov, $3!$ je počet vrcholov a $9!$ je počet nepoužitých trojíc.

3.

Vyrieš sústavu rovníc:

$$\frac{x-1}{3}+\frac{2y-4}{2}=5$$

$$\frac{x+1}{2}+(3-4y)=-\frac{17}{2}$$

RIEŠENIE:

$$I.\ \frac{x-1}{3}+\frac{2y-4}{2}=5$$

$$II.\ \frac{x+1}{2}+(3-4y)=-\frac{17}{2}$$

$$\begin{aligned} I.\quad 2(x-1)+3(2y-4)&=30\\ 2x-2+6y-12&=30\\ 2x+6y&=30+14\\ 2x&=44-6y\\ x&=22-3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II.\quad x+1+2(3-4y)&=-17\\ x+1+6-8y&=-17\\ x-8y&=-17-7\\ x&=-24+8y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22-3y&=-24+8y\\ -3y-8y&=-24-22\\ -11y&=-46\\ y&=\frac{46}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x&=22-3y\\ x&=22-3\times\frac{46}{11}\\ x&=\frac{104}{11} \end{aligned}$$

4.

V čísle 683*** nahraď hviezdičky vhodnými ciframi tak, aby vzniknuté 6-ciferné číslo bolo deliteľné 7, 8 aj 9.

RIEŠENIE:

Aby sme nejaké číslo a mohli zapísať ako číslo tvaru 683***, tak preň musí platiť nasledujúca nerovnosť: $683000\leq a\leq 683999$. Ďalej pre a platí: $a=7\times8\times9\times x,\ x\in N$. Túto rovnicu si dosadíme do nerovnice a dostávame: $683000\leq 7\times8\times9\times x\leq 683999$, $1355.15\leq x\leq 1357.14$ a teda $x\in\langle 1356, 1357\rangle$. Z toho dostávame, že x je ľubovoľné celé číslo na intervale $\langle 1356, 1357\rangle$ a teda x zodpovedajú iba čísla 1356 a 1357. Prislúchajúce a ku týmto x sú: $7\times8\times9\times1356$ a $7\times8\times9\times1357$. Výsledkom sú teda čísla 683424 a 683928.

5.

Naťka a Zuzka jedli jablká. Spolu ich mali 27. Naťka však má menší apetít a prvý deň zjedla 2/5 toho, čo zjedla Zuzka. Druhý deň zjedla Naťka polovicu toho čo zjedla Zuzka. Na konci druhého dňa už nemali žiadne jablká. Koľko jabĺk zjedla Naťka dokopy? (Naťka a Zuzka sú síce kamarátky, ale jablká si nedelia a jedia ich celé.)

RIEŠENIE:

Vzhľadom na to, že prvý deň zjedla Naťka 2/5 toho, čo zjedla Zuzka a jablká si nedelia, musela Zuzka zjesť prvý deň počet jabĺk, ktorý je deliteľný 5. Tzn. : 5, 10, 15, 20 alebo 25. Teraz skúšame vyšetriť všetky prípady:

- Ak by Zuzka zjedla prvý deň 5, Naťka by zjedla 2, dokopy by to bolo 7. Na druhý deň by teda museli zjesť 20 jabĺk. Spravíme si teda rovnicu

  $$x+1/2x=20$$

  a jej úpravou získame, že:

  $$3x=40$$

  a keďže 40 nie je deliteľné 3 (tzn. jablká by neostali celé) zisťujeme, že toto **nie je** správne riešenie.
- Skúsime teda druhú možnosť a to, že Zuzka zjedla prvý deň 10 jabĺk → Naťka 4 → dokopy 14.

  $$x+1/2x=13$$
  $$3x=26$$

  Ani 28 nie je deliteľné 3 a tak ani toto **nie je** správne riešenie.
- Tretia možnosť je, že Zuzka zjedla prvý deň 15 jabĺk → Naťka 6 → dokopy 21.

  $$x+1/2x=6$$
  $$3x=12$$
  $$x=4$$

  Ako vidíme, v tejto možnosti nám vyšlo celé číslo, a to, že Zuzka zjedla na druhý deň 4 jablká, tzn. Naťka musela zjesť zvyšné dve. Toto teda **je** správne riešenie, a aby sme si to zosumarizovali:
- **1. deň:** N→6 & Z→15

  2. deň: N→2 & Z→4

  Aby sme teda odpovedali na otázku: **Naťka zjedla dokopy 8 jabĺk.**

6.

Starý farmár sa na sklonku svojho života rozhodol, že celý svoj majetok, stádo oviec, rozdelí medzi svoje deti. Keďže pomer jeho synov a dcér bol 3:1, rozhodol sa, že rovnakým spôsobom medzi nich bude deliť ovce. Stádo oviec teda rozdelil na dve časti v pomere 3:1 a menšiu z týchto častí odkázal svojmu najstaršiemu synovi. Zvyšok oviec znovu rozdelil na dve časti v pomere 3:1 a menšiu z častí odkázal druhému najstaršiemu synovi. Takto postupoval, až kým každý z jeho synov nedostal nejaké ovce. Zvyšok, ktorý ostal po pridelení oviec najmladšiemu synovi, daroval svojej jedinej dcére. Vieme, že prostredný zo synov dostal práve 156 oviec. Ktoré z jeho detí dostalo najviac oviec? A ktoré najmenej?

RIEŠENIE:

Pomer synov a dcér je *3:1* a keďže vieme, že dcéra je práve jedna, synovia museli byť traja.

Všetky ovce si označíme ako *x*.

Zo zadania vieme určiť, akú časť stáda dostalo každé z detí:

- najstarší syn: *(1/4)*x*
- prostredný syn: *(3/16)*x*
- najmladší syn: *(9/64)*x*
- dcéra: *(27/64)*x*

A keďže vieme, že prostredný syn dostal *156* oviec, vieme určiť, koľko oviec bolo v stáde: *x = 832*.

Keď máme vyjadrenú hodnotu *x*, stačí nám dopočítať, koľko dostalo každé z detí a hodnoty nakoniec porovnať:

- najstarší syn: *208*

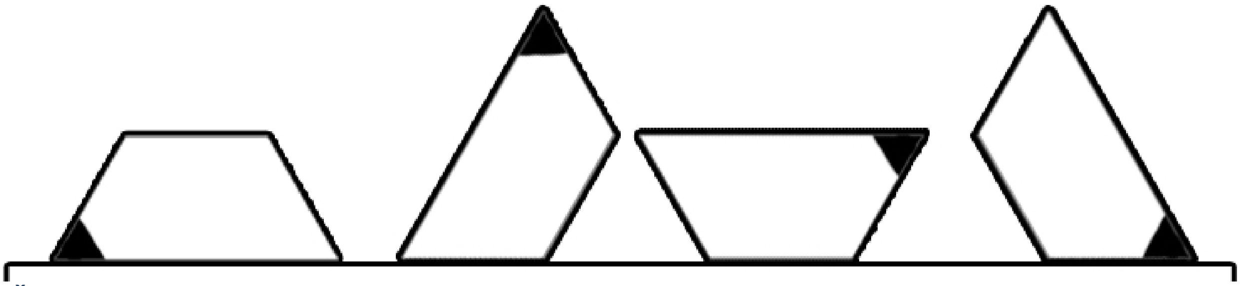
- prostredný syn: *156*
- najmladší syn: *117*
- dcéra: *351*

351 > 208 > 156 > 117
dcéra > najstarší syn > prostredný syn > najmladší syn

A máme hotovo.

7.

Vypočítajte dráhu, ktorú prejde vrchol A rovnoramenného lichobežníka ak ho 3-krát otočíme (pokotúľame) po hranách. Vieme že strana |AB| = 6 cm, strana |DA|= 3 cm a uhol α ktorý zvierajú má 60°.



RIEŠENIE:
Pri každom otočení sa bod pohybuje po kružnici. Dráhu akú prešiel zistíme vypočítaním kruhového oblúku s polomerom vzdialenosti bodu okolo ktorého sa lichobežník otáčal od vrcholu ktorého dráhu počítame o uhol ktorý zistíme podľa vnútorných uhlov lichobežníka.

1. Otočenie:

$$r = 6\,cm$$
$$\beta = 120°$$
$$s_1 = 2\pi r \frac{\beta}{360°} = 4\pi\,cm$$

2. Otočenie:

$$r = \sqrt{27}\,cm$$
$$\gamma = 60°$$
$$s_2 = 2\pi r \frac{\gamma}{360°} = \frac{\sqrt{27}}{3}\pi\,cm$$

3. Otočenie:

$$r = 3\,cm$$
$$\varphi = 60°$$
$$s_3 = 2\pi r \frac{\varphi}{360°} = \pi\,cm$$

Celková dráha ktorú prešiel bod: $s = s_1 + s_2 + s_3 = 4\pi + \frac{\sqrt{27}}{3}\pi + \pi = 21.14\,cm$

8.

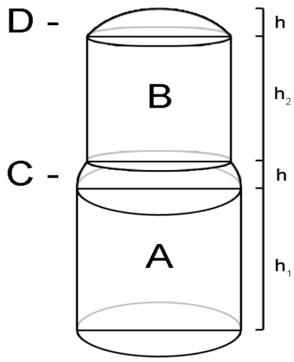
Vypočítajte objem tohto telesa ak viete že útvary D a C vytvárajú dokopy polguľu a pomer výšky jedného a druhého valca sa rovná pomeru ich polomerov, tento vzťah môžeme zapísať takto:

$h_1 : h_2 = r_1 : r_2$.

$h = 0{,}5\,cm$

$h_1 = 6\,cm$

$h_2 = 4\,cm$



RIEŠENIE:

C a D spolu tvoria polguľu s polomerom 1 cm.

$$V_1 = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi\,cm^3$$

A je valec s polomerom podstavy $r = 1\,cm$ a výškou $h_1 = 6\,cm$.

$$V_2 = \pi r^2 h_1 = 6\pi\,cm^3$$

B je valec s polomerom podstavy $r_2 = 23\,cm$ ktorú sme zistili vďaka podobnosti $h_1 : h_2 = r_1 : r_2$ a výškou $h_2 = 4\,cm$.

$$V_3 = \pi r_2^2 h_2 = \frac{16}{9}\pi\,cm^3$$

Objem celého telesa: $V = \frac{76}{9}\pi = 26.5\,cm^3$

9.

5 kamarátov z 3.F býva v rôznych domoch vedľa seba na rovnej ulici. Každý býva v inom dome a programuje v inom programovacom jazyku. Žiadni dvaja nedostali rovnaký počet bodov v matematickej olympiáde a nemajú radi rovnakú farbu.

1. Zuzka býva v prvom dome.
2. Naťka programuje v Imagine.
3. Noro dostal v Matematickej olympiáde 11 bodov.
4. Lulu má rada fialovú.
5. Ten, kto má rád ružovú dostal 16 bodov.
6. Ten, kto má rád zelenú, programuje v Pythone.
7. Mrož býva v típí.
8. Človek z prostredného domu programuje v Pascale.

RIEŠENIE:

1. dom	**2. dom**	**3. dom**	**4. dom**	**5. dom**
Zuzka	Naťka	Mrož	Lulu	Noro
Hrad	Zámok	Típi	Iglu	Maringotka
Baltík	Imagine	Pascal	Java	Python
červená	modrá	ruzová	fialová	zelená
4	7	16	14	11

Spravím si tabuľku s číslami domov. Vidím, že Zuzka býva v prvom dome. Človek z prostredného domu programuje v Pascale. Zuzka býva vedľa zámku, keďže je na kraji 2. Dom je zámok. Iglu a maringotka sú v tomto poradí veľa seba, nemôžu byť domy 1. a 2.. 3. tiež nie, lebo ten kto býva v iglu programuje v Jave a majiteľ tretieho domu programuje v pascale, takže iglu je 4. dom a maringotka 5.. Ten, kto býva v iglu, programuje v Jave. Mrož býva v típí, takže Zuzka býva v poslednom dome, ktorý som ešte nenapísala do tabuľky: hrad. Ten, kto býva na hrade, má rád červenú. Ten, kto má 7 bodov, býva vedľa toho, kto má rád červenú. Preto človek, ktorý žije v druhom dome má 7 bodov z olympiády. Zuzka neprogramuje v Jave ani v Pascale, lebo tie už sú inde v tabuľke, neprogramuje v Imagine, lebo v ňom programuje Naťka a nemá rada zelenú, takže neprogramuje v Pythone. Ostal iba Baltík. Ten, kto má rád modrú, má suseda, ktorý programuje v Baltíku. Tajže majiteľ 2. Domu má rád modrú. V 2. Dome nemôže bývať Zuzka ani Mrož, lebo sú už v tabuľke, Noro tiež nie, lebo ten má 11 bodov z olympiády ani Lulu, lebo má rada fialovú. Môže tam bývať iba Naťka. Naťka programuje v Imagine. Jediný dom o koho majiteľovi nevieme v čom programuje je 5. dom , takže posledný čo ostalo je Python, takže v 5. dome sa programuje v Pythone. Ten, kto má rád zelenú, programuje v Pythone. Lulu má rada fialovú. Táto kombinácia bude v 4. dome, lebo v domoch 1. 2. A 5. Farbu vieme a v tretom dome býva Mrož. Posledné meno k 5. Domu, lebo ostatných majiteľov už viem. Noro, teda býva v 5. Dome. Noro dostal v Matematickej olympiáde 11 bodov. Posledná farba ružová k 3. domu. Ten, kto má rád ružovú dostal 16 bodov. A posledný bod, ktorý mi ostal: Ten, kto má rád modrú, býva vedľa toho, kto má v matematickej olympiáde 4 body. Mrož vieme koľko má bodov, takže Zuzka bude mať 4 body. Koľko má Lulu bodov to ešte nevieme, ale posledné číslo čo ostalo je 14 bodov. Lulu má v matematickej olympiáde 14 bodov.

10.

Je daný obdĺžnik ABCD, kde |AB|=9cm a |BC|=8cm. Kružnica k sa dotýka strán AD a DC a jej polomer je 3 cm. Kružnica k´ sa dotýka strán AB a BC a jej polomer je 2 cm. Tieto dve kružnice sa navzájom tiež dotýkajú. Zistite obsah trojuholníka AS´S, kde S je stred kružnice k a S´ je stred kružnice k´.

RIEŠENIE:

Úsečka *EF* prechádza cez *S* a je rovnobežná s *DC*. Teda úsečka *FC* má takú istú dĺžku ako *r*. Tak isto aj *GH* prechádza cez *S* ´ a je rovnobežná s úsečkou *BC*.

$$|FB|=|BC|-|FC|$$
$$|FB|=8-3$$
$$|FB|=5\,cm=|HL|$$
$$|DG|=|CD|-|CG|$$
$$|DG|=9-2$$
$$|DG|=7\mathrm{cm}=|EL|$$

Obsah obdĺžniku *AHLE* je *|HL|*|EL|* teda *7*5 = 35 cm²*. Ak od jeho obsahu odčítame obsahy trojuholníkov *AHS´*, *S´LS* a *ASE*, tak výsledok bude obsah trojuholníku *AS´S*. trojuholníky sú pravouhlé takže potrebujem dve strany pri pravom uhle na výpočet obsahu. Obsah *AHS´ |AH|=|EL|=5cm |HS´|=r´=2cm*. Takže *2*5/2= 5cm²* = obsah *AHS´*. Obsah *S´LS |S ´L|= |HL|-r´=5-2=3cm*, *|LS|=|EL|-r=7-3=4cm*. Takže *3*4/2=6cm²*. Obsah *ASE |SE|=r=3cm*, *|EA|=|HL|=5cm*. Takže *3*5/2=7,5cm²*. *35cm²-5cm²-6cm²-7,5cm²= 16,5cm²*.