4. ROČNÍK TMS 2012/2013 – RIEŠENIA

4. SÉRIA

1.

Zuz má v taške porozsýpané perá. Pamätá si, že tam má presne 4 ružové, 2 fialové, 36 modrých a dokonca aj jedno zelené pero. Je však lenivá a nechce sa jej pozerať, akú farbu vyťahuje. Koľko najmenej pier musí vytiahnuť, aby mala istotu, že bude mať v ruke 4 perá rovnakej farby?

RIEŠENIE:

V prípade, že by mala Zuz smolu a vytiahla by 1 zelené pero, 2 fialové, 3 ružové a 3 modré perá, tak akékoľvek ďalšie pero, ktoré by vytiahla (teda buď ružové alebo modré), by dotvorilo štvoricu.

1+2+3+1=10

Musí teda vytiahnuť najmenej 10 pier.

2.

Dokáž: $sin^2 a + cos^2 a = 1$.

RIEŠENIE:

Aj keď ste si ku tomuto príkladu museli hľadať informácie, dosť veľa z vás ho zvládlo.

Predstavme si pravouhlý trojuholník s preponami *a* a *b*, odvesnou *c* a uhlom *α* medzi *b* a *c*.

Potom platí: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Po dosadení do vyťahu zo zadaní a prevedení ekvivalentných úprav dokážeme, že:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

A to je už stará známa Pytagorova veta.

3.

Rád sa túlal bez cieľa, obzeral si ľudí, továrne, snoril po meste, rád dýchal ten rozochvený vzduch presýtený vôňou uhia a farieb. Ohromovala ho mohutnosť, mestá a obrovské bohatstvá, nakopené v skladištiach a továrňach, zažíhali mu v očiach plamne žiadostivosti, vzbudzovali v duši strašné vidiny, napĺňali ho čoraz mocnejšou túžbou po vládnutí a užívaní života; tento šialený vír života a ten zlatý potôčik, ktorý preteal mestom, opájali ho svojou mohutnosťou, hypnotizovali ho, vyvolávali v ňom nevýslovnú žiadostivosť, dávali mu silu k boju, k víťazstu, k hrabivosti. Miloval túto „zasľúbenú krajinu“ ako dravá zver miluje hlboké pralesy oplývajúce koristťou. Zbožňoval túto „zasľúbenú krajinu“ pretekajúcu zlatom a krvou, bažil po nej, vystieral k nej svoju chamtivú nruč a kričal víťazným, dychtivým hlasom: - Moja! Moja! - a chvíľami už cítil, že sa jej zmocnil navždy a že koisť nepustí, kým z nej nevysaje všetko zlato.

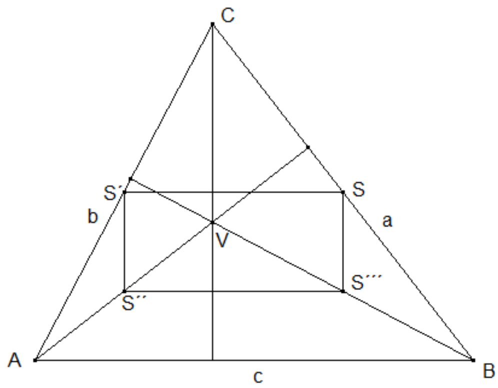
Tvojou úlohou je nájsť heslo. Bolo by to samozrejme ľahké, keby sme ti to správne heslo niekde do tohto zadania napísali. Lenže to sme nespravili. Presný opak je pravdou!

RIEŠENIE:

uhia – uhlia – L
plamne – plamene – E
preteal – pretekal – K
víťazstu – víťazstvu – V
nruč – náruč – Á
koisť – korisť – R

Heslom bol LEKVÁR.

4.



Trojuholník *ABC* má strany *a*, *b* a *c* postupne oproti vrcholom *A*, *B* a *C*. Stred strany *a* označíme *S* a stred strany *b* označíme *S'*. Priesečník výšok si označíme *V*. Stred úsečky *VA* označíme S" a stred úsečky *VB* označíme S"'. 4-uholník *SS'S''S'''* vyzerá ako obdĺžnik, je to naozaj tak? Prečo?

RIEŠENIE:

Stredná priečka sa nachádza v trojuholníku a ide zo stredu jednej strany do stredu druhej strany. Jej vlastnosti sú že je rovnobežná s treťou stranou a o polovicu menšia ako táto strana. Dva trojuholníky ABV a ABC, tieto dva trojuholníky majú spoločnú stranu AB. Keďže S a S´ sú stredy strán trojuholníka ABC, tak je to stredná priečka. Taktiež S´´ a S´´´ sú stredy AV a BV, takže je to stredná priečka na tú istú stranu AB. Preto sú tieto dve stredné priečky rovnobežné a rovnako dlhé. Taktiež je to pri trojuholníkoch VBC a AVC, ktoré majú spoločnú stranu VC a ich stredné priečky na túto stranu sú SS´´´ a S´S´´, takže sú tiež rovnako dlhé a rovnobežné. Tieto dve stredné priečky sú rovnobežné s výškou, ktorá je kolmá na stranu AB, ktorá je rovnobežná s druhými strednými priečkami, preto sú na seba všetky kolmé a preto je to obdĺžnik.

5.

Obvod kosoštvorca je $104cm$ a jeho obsah je $480cm^2$. Určte dĺžky jeho uhlopriečok.

RIEŠENIE:

Označíme si x,y uhlopriečky a potom:

$$a = \sqrt{(\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{2})^2}$$

$$S = \frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow y = \frac{2S}{x} \Rightarrow y = \frac{960}{x}$$

$$a = \sqrt{(\frac{x}{2})^2 + (\frac{960}{2x})^2} = 26$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{230400}{x^2} = 676 \quad /4x^2$$

$$x^4 + 921600 = 2704x^2 \quad /Substitúcia\, x^2 = u$$

$$u^2 - 2704u + 921600 = 0$$

$$(u - 400)(u - 2304), tedau_1 = 400au_2 = 2304$$

$$akx = u^{2'}takx_1 = \sqrt{400}ax_2 = \sqrt{2304}, teda$$

$$x_1 = 20ax_2 = 48$$

Výsledné uhlopriečky majú teda dĺžky 20cm *a* 48cm.

Úloha bola počnúc tretím riadkom vzorového riešenia pre žiakov základnej školy už neriešiteľná, preto sa ospravedlňujem za svojich ambicióznych žiakov, ktorí zabudli na to, že boli deviatakmi a používať substitúcie a riešiť kvadratické rovnice sa naučili až na gymnáziu. Oravcová

6.

Sú dané dve sústredné kružnice s rôznymi polomermi. Obidve teda majú stred v bode *S*, avšak menšia kružnica má polomer r_1 a väčšia r_2. Menšej kružnici zostrojíme dotyčnicu, ktorá väčšiu kružnicu pretne v dvoch bodoch. Tie vytvoria tetivu ku tejto väčšej kružnici. Táto tetiva je priemerom ďalšej kružnice, ktorú zostrojíme so stredom v danom bode dotyku. Aký je pomer obsahu medzikružia menšej a väčšej kružnice ku obsahu tejto novovzniknutej kružnice?

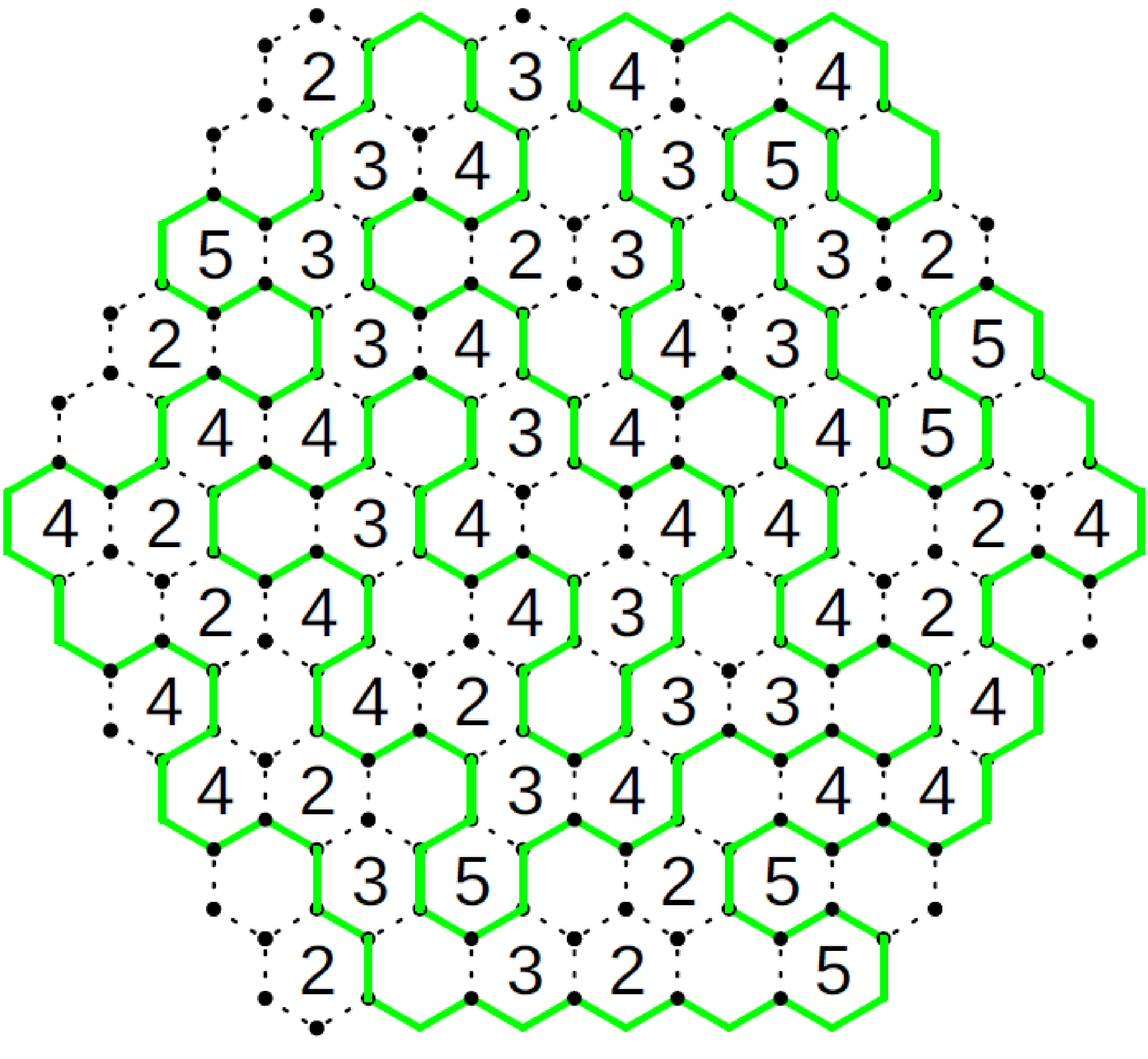
RIEŠENIE:

Polomer väčšej kružnice si označím r_2 a jej obsah teda bude πr_2^2. Menšia kružnica bude mať polomer r_1, a preto jej obsah bude πr_1^2. Aby som vypočítala obsah medzikružia musím obsah väčšej kružnice odčítať od menšej: $\pi r_2^2 - \pi r_1^2$. Teraz už len vypočítať obsah tretej kružnice. Táto kružnica má stred T na menšej kružnici, takže ich vzdialenosť je r_1. Tretia kružnica sa pretína v dvoch bodoch s väčšou kružnicou(jedným s nich je A), a preto tieto dva body sú vzdialené od stredu kružníc r_1. Teda ak je T stred a A leží na obvode, tak TA je polomer. Keďže TA je dotyčnica menšej kružnice a dotyčnica je kolmá na polomer v bode dotyku, tak pomocou Pytagorovej vety môžeme vypočítať TA: $|TA| = \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$, takže obsah tretej kružnice je $\pi\sqrt{r_2^2 - r_1^2}^2$. Teraz tieto obsahy porovnám $\pi r_2^2 - \pi r_1^2 : \pi\sqrt{r_2^2 - r_1^2}^2$. Mocnina zruší odmocninu a v ľavo môžeme π vyňať : $\pi(r_2^2 - r_1^2) : \pi(r_2^2 - r_1^2)$. Tieto dva výrazy sa zjavne rovnajú, preto je pomer obsahu medzikružia a obsahu tretej kružnice 1:1.

7.

Spojte celý útvar jednou spojitou čiarou. Čísla v 6-uholníkoch označujú, koľkými hranami daného 6-uholníka sme prešli. Odpoveďou sú za sebou zoradené (zľava doprava a zhora nadol) chýbajúce čísla v 6-uholníkoch.

RIEŠENIE:



8.

Mrož je rád tajomný a preto nikomu nechce prezradiť, kedy oslavuje narodeniny. Raz sa nechtiac preriekol a vyzradil, že je to vo februári, nemôžeme však dúfať, že zaváha znovu a rovnakým spôsobom vyzradí i deň svojich narodenín. Preto sa majstri vyjednávači, Naťka so Zuzkou, rozhodli, že mu navrhnú ponuku, ktorá sa neodmieta. Budú sa ho pýtať len otázky, na ktoré stačí odpovedať "áno" alebo "nie" a za každú položenú otázku kúpia Mrožovi jeden puding. Najmenej koľko pudingov musia kúpiť, aby mali istotu, že sa v akomkoľvek prípade dozvedia správnu odpoveď?

RIEŠENIE:

Svoje riešenie nazývam „delenie na polovice“. Pre tento názov som sa rozhodol, lebo pri ňom, eh, delíme na polovice... Nezáleží na tom, aký mesiac to je, vždy by sa odpoveď dala zistiť po položení maximálne piatich otázok, február vás mal len popliesť (okrem toho, že som sa naozaj narodil vo februári). Budeme postupovať nasledovne: Vždy počet dní rozdelíme na polovice a podľa odpovede budeme pokračovať ďalej. Prvá otázka bude „Narodil si sa po 15.?“ Pri odpovedi „áno“ by druhá otázka bola „Narodil si sa po 23.?“, pri odpovedi „nie“ by to bolo „Narodil si sa po 8.?“ Takto pokračujeme, až kým sa nedostaneme ku piatej otázke. Prikladám jednu z možností pýtania sa, ak by to bolo nezrozumiteľné:

Po 15.? Áno -> Po 23.? Áno -> Po 27.? Nie -> Po 25.? Nie -> Po 24.? -> Nie

Vieme, že je to neskôr, ako 23. a rovnako tak vieme, že to nie je neskôr, ako 24., z čoho môžeme usúdiť, že to určite bolo práve 24. Správna odpoveď je teda, že minimálny počet otázok je 5, preto „5 otázok“ (pudingov).

9.

Keďže Noro potrebuje nový zošit na matematiku, zobral dvadsať listov papiera položených na sebe a v strede ich preložil. Vytvoril si tak zošit s osemdesiatimi stranami. Aby mal v poznámkach poriadok, tak si novovzniknuté strany očísloval od 1 po 80. Určte, ktoré tri čísla strán budú napísané na liste papiera, na ktorom je napísané aj číslo strany 30.

RIEŠENIE:

Najskôr si uvedomíme, ktoré čísla strán budú na prvom papieri. Sú to čísla 1, 2, 79, 80. Na nasledujúcom papieri sú čísla 3, 4, 77, 78. Ako si môžeme všimnúť, tak postupne pridávame od začiatku a odoberáme z konca. Tak si to dáme do vzorčeka od najmenšieho po najväčšie:

$$A = 2n - 1$$
$$B = 2n$$
$$C = 81 - 2n$$
$$D = 82 - 2n$$
$$n \in \langle 1; 20 \rangle$$

pre A, B, C, D ako čísla na papieri s číslom *n*.

Keďže je čislo strany 30 párne a je pred stredom zošita (30 <= 40), tak je to strana B. Ostatné si jednoducho dopočitame:

$$30 = B = 2n$$
$$n = 15$$
$$A = 2 \times 15 - 1 = 29$$
$$C = 81 - 2 \times 15 = 51$$
$$D = 82 - 2 \times 15 = 52$$

Takto sme si určili čísla strán 29, 51 a 52.

10.

Určite, koľko 6-ciferných palindrómov existuje.

Palindróm je číslo, ktoré sa číta odzadu rovnako ako spredu, napr.: 52799725 je 8-ciferný palindróm.

RIEŠENIE:

6-ciferné palindrómy vytvoríme tak, že vezmeme trojciferné číslo a napíšeme ho samého seba odzadu. Môžeme ho označiť aj ako $x_1\, x_2\, x_3\, x_3\, x_2\, x_1$ - namiesto x_1 môže byť 1,2,3,4,5,6,7,8,9 (0 nie lebo by to nebolo 6-ciferné číslo) a namiesto x_2 a x_3 môže byť 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. V podstate hľadáme všetky trojciferné čísla (100-999), ktorých je preto 900. Taký je teda aj počet 6-ciferných palindrómov.