5. Ročník TMS – Riešenie 1. série

Príklad 1

Napíšte 3 ďalšie čísla ktoré budú nasledovať v tomto rade:

Riešenie

Ku každému ďalšiemu číslu je pripočítané v poradí ďalšie nepárne číslo ako bolo číslo pri odčítaní predposledného čísla od posledného. To znamená že čísla v poradí sú **48, 63, 80**.

Príklad 2

Zistite polomer kruhu, ak o ňom vieme že jeho obsah sa rovná obsahu štvorca ABCD. Trojuholník AXC má obsah 13 cm^2.

Riešenie

Označme si kruh premennou k. V prvom rade si zistíme pomer trojuholníka **AXC** a štvorca **ABCD**, čo je **1:4**. Toto vyplýva z faktu, že obsah trojuholníka **AXC** sa rovná obsahu **XBC**. Vďaka ich obsahom dostávame súčtom obsah trojuholníka **ABC**, ktorý spolu s totožným **ACD** predstavujú obsah štvorca **ABCD**.

Zo zadania $S_{ABCD}=S_k$, a teda $a^2=\pi r^2$. Zo vzťahu vyjadríme **r**:

$$r=\sqrt{\frac{4\cdot S_{AXC}}{\pi}} \quad cm^2$$

$$r=\sqrt{\frac{4\cdot 13}{\pi}} \quad cm^2$$

$$r^2=\frac{52}{\pi}\approx 16{,}56 \quad cm^2$$

$$r\approx 4{,}07\,cm$$

Polomer kružnice **k** má dĺžku **4,07 cm** po zaokrúhlení.

Príklad 3

Koľko koní sa naraz zmestí na jednu šachovnicu bez toho aby sa navzájom ohrozovali?

Riešenie

Vždy keď postavíme koňa na jednu farbu políčka, nemôže nikdy ohroziť inú farbu. Teda ak postavíme koňov na všetky čierne políčka (32), nemôžu sa navzájom ohroziť. Keby však chceme postaviť koňa aj na biele políčko, tak je ohrozený viacerými ako jedným koňom, a musíme sa zbaviť viac koňov ako pridáme.

Príklad 4

Čo najpresnejšie vyjadrite obe neznáme:

$$x+1-\left\{10x-3\sqrt{9x^4}+\frac{14[x+8(5x-6)]}{7}+4x\right\}-11x-9(x^2+2x)=113y$$

$$\frac{\dfrac{\sqrt{3x^4}}{\sqrt{15y^2x^2}}}{\dfrac{\sqrt{18x^2}}{\sqrt{30}}}=1$$

Riešenie

$$x=\frac{-133\sqrt{3}-291}{327}$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

5. ROČNÍK TMS – RIEŠENIE 1. SÉRIE

PRÍKLAD 5

V akom pomere sú strany štvorcov?

RIEŠENIE

Nech strana menšieho štvorca je a. Potom strana dlhšieho štvorca je potom podľa pytagorovej vety $a\sqrt{2}$. Teda pomer je $a:a\sqrt{2}=1:\sqrt{2}$

PRÍKLAD 6

9 ľudí oberie sad za 6 dní. Za koľko dní oberie sad 12 ľudí ak dvaja z nich robia len polovicu prvého dňa a potom odídu.

RIEŠENIE

9 ľudí oberie sad za 6 dní, teda 1 človek oberie sad za 54 dní. 1 človek oberie za deň $\frac{1}{54}$ sadu. Tých dvoch, čo robili len polku prvého dňa a potom odišli môžeme zarátať ako keby robil jeden človek celý deň. Po ich robote ostane urobiť $1-\frac{1}{54}=\frac{53}{54}$ sadu.

Ďalej pracuje 10 ľudí, ktorí za deň spravia $\frac{10}{54}$ sadu. Sad oberú za $\frac{\frac{53}{54}}{\frac{10}{54}}=5{,}3$ dňa.

PRÍKLAD 7

Koľko čísiel menších ako 150 má aspoň 3 rôzne prvočíselné delitele.

RIEŠENIE

Ide o jednoduchú kombinatorickú úlohu. Vypíšeme si všetky vzájomné násobky malých prvočísel, a tie ktoré sa dajú, môžeme vynásobiť ďalším číslo.

2*3*5 = 30	2*3*23 = 138	2*2*3*5 = 60
2*3*7 = 42	2*5*7 = 70	2*2*3*7 = 84
2*3*11 = 66	2*2*5*7 = 140	2*2*3*11 = 132
2*3*13 = 78	2*5*11 = 110	2*3*3*5 = 90
2*3*17 = 102	2*5*13 = 130	2*3*3*7 = 126
2*3*19 = 114	3*5*7 = 105	2*2*2*3*5 = 120

Teda spolu to je 18 riešení.

PRÍKLAD 8

Máme dané, že strana SO má dĺžku 8 cm, strana OQ má dĺžku 3 cm a strana SP má dĺžku 3 cm. Ďalej vieme že strany PR a OQ sú rovnobežné. Vypočítajte polomer kružnice k so stredom K.

RIEŠENIE

Pre výpočet dĺžky polomeru kružnice **k** bude potrebné určiť dĺžku strany **SR**. Pri riešení tohto príkladu je potrebné si uvedomiť, že trojuholníky **SRP** a **SQU** sú si podobné. Vďaka tomu je možné určiť dĺžku strany **PR** podľa pomeru strán, ktoré poznáme (**SO**, **OQ** a **SP**):

$$|PR|=\frac{|OQ|\cdot|SP|}{|SO|}=1{,}125\,cm$$

Ďalej si uvedomme, že pre trojuholník **SRP** platí tálesova veta (jeho prepona **SR** je vlastne priemer kružnice **k**). Z tálesovej vety vyplýva, že trojuholníky spĺňajúce jej podmienky sú pravouhlé. Použijeme preto pytagorovu vetu v tvare:

$$c^2=a^2+b^2$$

$$|SR|^2=|SP|^2+|PR|^2$$

Dĺžka úsečky **SR** sa potom rovná odmocnine zo súčtu mocnín ostatných strán:

$$|SR| = \sqrt{|SP|^2 + |PR|^2}$$

A keďže |SR| je priemer kružnice **k**, polomer **r** sa dá vyjadriť ako polovica **|SR|**, a teda:

$$r = \frac{\sqrt{|SP|^2 + |PR|^2}}{2}$$

Kedže dĺžku úsečky **PR** sme si už vypočítali, dosaďujeme do vzorca pre **r**:

$$r = \frac{\sqrt{3^2 + 1{,}125^2}}{2}$$

$$r \approx \frac{\sqrt{10{,}266}}{2}$$ (zokrúhlenie na 3 desatinné miesta)

$$r \approx 1{,}602\,cm$$

Polomer kružnice **k** je teda **1,602 cm** po zaokrúhlení.