5. Ročník TMS – Riešenie 2. série

Príklad 1

Pretože je trojuholník rovnostranný, jeho ťažisko sa nachádza v tom istom bode, v akom sa nachádza stred opísanej kružnice. Polomer kružnice sú teda $\frac{2}{3}$ dĺžky ťažnice. Dĺžku ťažnice zistíme Pytagorovou vetou $a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$. Dĺžka ťažnice je $\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$, ale my potrebujeme vedieť $\frac{2}{3}$ tejto dĺžky a teda polomer má veľkosť $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Obsah kruhu zistíme vzorcom $S=\pi r^2$. Obsah kruhu po výpočte je $\frac{\pi a^2}{3}$.

Príklad 2

Ku každému prvému číslu je pripočítané nasledujúce najbližšie nepárne číslo a každé druhé číslo je polovica z čísla pred ním. Ďalšie čísla v postupnosti sú teda 26, 13, 37.

Príklad 3

Z v predošlej sérií sme si už vypočítali dĺžku stenovej uhlopriečky (a√2). Tú môžeme použit pri výpočte telesovej uhlopriečky, taktiež pomocou pytagorovej vety. Zisťujeme, že jej dĺžka bude a√3. Ďalej už len zostáva dať do pomeru druhé mocniny (obsah). Potom:

$$a^2 : (a\sqrt{3})^2 = a^2 : 3a^2 = 1:3$$

Príklad 4

Hľadáme taký prípad, kedy v priebehu troch dní navštívi každý z nich posilňovňu <u>práve jeden</u> krát. Z tabuľky vidíme že takáto situácia nastane po 16 dňoch.

	Po	Ut	St	Št	Pi	So	Ne
1.		Maťo	Tomáš		Maťo	Tomáš	
2.	Samo	Tomáš/Maťo		Samo	Tomáš/Maťo		Samo
3.	Tomáš	Maťo					

Príklad 5

Strelec sa pohybuje po uhlopriečke, kôň do L. Maximálny počet koní dosiahneme tak, že každý strelec bude mať oproti sebe ďalšieho strelca (až na okrajových) na druhom konci šachovnice.

K	K	S	S	S	S	S	K
				K			
			K				
K	S	S	S	S	S	K	K

5. Ročník TMS – Riešenie 2. série

Príklad 6

Keďže musí byť možné zobrať akýkoľvek počet jabĺk začneme od najmenšieho. V prvej debničke bude jedno jablko a v druhej dve. Keďže tri jablká už dostaneme z prvej a druhej, v ďalšej debničke budú 4 jablká. Takto môžeme pokračovať po mocninách dvojky, keďže súčet predchádzajúcich je vždy o jedna menší ako nasledujúca mocnina. Takto sa dostaneme na 10. Debničku v ktorej nemôže byť 512 ako mocnina dvojky ale len zvyšok jabĺk a teda 1000-511=489. Výsledné rozloženie jabĺk v debničkách teda bude:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	489

Príklad 7

Trojuholník DSG a trojuholník ESB sú zhodné. Uhol DSG vypočítame pomocou súčtu stredových uhlov. Uhol FSG=360°/9=40°. DSG=3*FSG=120°. Ďalej vieme že trojuholník DSG je rovnoramenný keďže DS a GS sú polomery opísanej kružnice tomuto 9-uholníka. Uhol SDG potom bude rovný (180°-120°)/2=30°. Potom potrebujeme vedieť uhly trojuholníka SDE. Uhol DSE=40° pretože je to stredový uhol 9-uholníka a keďže je to rovnoramenný trojuholník, uhol SDE=(180°-40°)/2=70°. Z trojuholníka DXE potom zistíme hľadaný uhol DXE. Uhol XED=70°-30°=40° a teda uhol DXE =180°-2*40°=100°

Príklad 8

Najprv uvažujem len prvých 999 999 čísle. Čísla od 0 po 999 999 si zoradím do párov. 0 a 999 999, 1 a 999 998, 1 a 999 997, atď. Pri takýchto pároch, bude súčet každej dvojice 999 999. Nikdy nedôjde k prekročeniu z jednotiek na desiatky, desiatok na stovky a podobne, takže súčet cifier jednotlivých dvojíc bude rovnaký ako čísla 999 999, teda 54. Takýchto dvojí je od 0 po 999 999 presne 500 000, teda ciferný súčet všetkých týchto čísel bude 500 000 * 54, teda 27 000 000. Nakoniec treba ešte pripočítať ciferný súčet čísla 1 000 000, teda 1. Takže konečný výsledok je 27 000 001.

Bonus

Úloha je základom Goldbachovej hypotézy, najstaršieho a najznámejšieho problému v teórií čísel. Dodnes nebola dokázaná :)